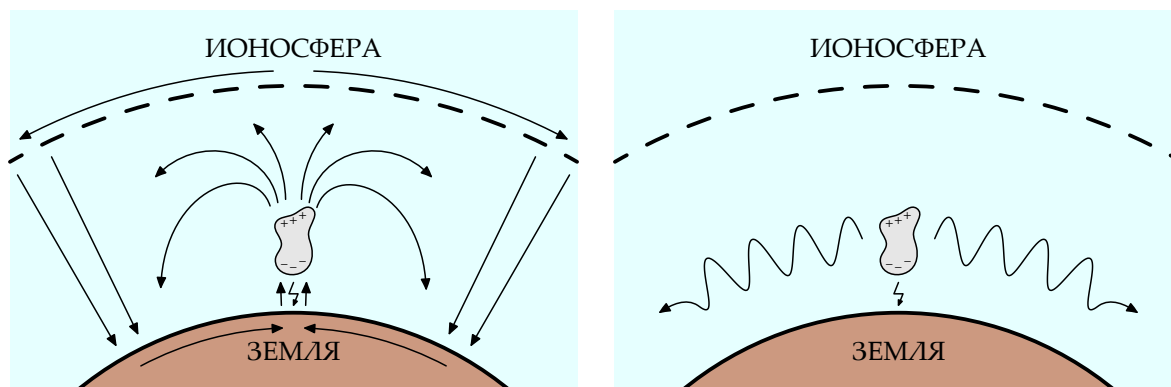


# Глобальная электрическая цепь постоянного и переменного тока

16 ноября 2023 г.

## Вводные замечания

Глобальная электрическая цепь (ГЭЦ) — собирательное название для двух концепций в атмосферном электричестве. Одна из этих концепций — так называемая ГЭЦ постоянного тока — описывает распределённый токовый контур в атмосфере, в котором роли источников выступают области разделения зарядов в грозовых облаках и некоторых других облаках с развитой электрической структурой. Ключевым обстоятельством для существования ГЭЦ постоянного тока является очень быстрый (экспоненциальный) рост проводимости атмосферы с высотой, а также высокая проводимость земной поверхности по сравнению с приземным воздухом. В результате формируется токовая система, в которой разделение зарядов в облаках заставляет ток в атмосфере течь вверх, затем этот ток растекается по высокопроводящей ионосфере и возвращается вниз в областях хорошей погоды, после чего поверхность Земли замыкает контур (схематически это показано на [рис. 1а](#)).



**Рис. 1.** Схематическое изображение ГЭЦ постоянного тока (слева) и ГЭЦ переменного тока (справа).

ГЭЦ переменного тока имеет несколько другую природу. Отмеченные выше высокая проводимость поверхности Земли и нижней ионосферы позволяют говорить о резонаторе Земля — ионосфера. Обычно под ГЭЦ переменного тока понимают совокупность так называемых шумановских резонансов — глобальных резонансов, возбуждаемых молниевыми разрядами в этом резонаторе (схематически это показано на [рис. 1б](#)). Если описание ГЭЦ постоянного тока с точки зрения электродинамики обычно сводится к уравнениям токостатики, то ГЭЦ переменного тока естественно описывать на языке теории волноводов и резонаторов. Важной особенностью ГЭЦ переменного тока, отличающей её от классических задач этого раздела электродинамики, является наличие проводящих свойств у среды, заполняющей внутреннее пространство.

Таким образом, строго говоря, из двух объектов, именуемых ГЭЦ, лишь ГЭЦ постоянного тока является электрической цепью в строгом смысле этих слов. Изначально именно её и называли глобальной цепью, однако затем определение расширили и перенесли на шумановские резонансы, проведя параллели между двумя задачами: подобно

тому как глобальное распределение электрически активных облаков (прежде всего грозных, но не только) поддерживает токовый контур ГЭЦ постоянного тока, глобальное распределение молниевых разрядов (непосредственно связанных с теми же самыми грозными облаками) поддерживает электромагнитные колебания в резонаторе Земля — ионосфера.

## Часть 1. Глобальная электрическая цепь постоянного тока

### § 1. Проводимость атмосферы

Изучение ГЭЦ постоянного тока мы начнём с обсуждения проводимости. Проводимость атмосферы вплоть до ионосферных высот (то есть вплоть до высоты порядка 70 км) определяется ионами молекул воздуха и может предполагаться изотропной. Обычно при оценках этой проводимости в качестве базового приближения предполагают, что концентрации положительных и отрицательных ионов в каждой точке приблизительно равны — это позволяет говорить о концентрации ионных пар  $n$ . Такой подход не является вполне самосогласованным, однако в качестве простейшего приближения он кажется вполне приемлемым.

Изменение  $n$  может происходить за счёт различных физических процессов, из которых важнейшими являются ионизация (рождение новых ионных пар под действием внешних источников), ион-ионная рекомбинация (уничтожение ионных пар) и прилипание ионов к частицам аэрозолей и гидрометеорам (предполагается, что подвижность прилипших ионов падает практически до нуля и они перестают влиять на проводимость). Учёт всех этих факторов даёт для  $n$  следующее уравнение:

$$\frac{dn}{dt} = q - \alpha n^2 - \sum_i \beta_i n_i n, \quad (1)$$

где  $q$  — скорость образования ионных пар,  $\alpha$  — коэффициент ион-ионной рекомбинации, а член  $-\beta_i n_i n$  описывает прилипание ионов к частицам аэрозолей или гидрометеорам типа  $i$  ( $n_i$  — их концентрация,  $\beta_i$  — соответствующий коэффициент прилипания).

Равновесная концентрация ионных пар  $n$  определяется из условия баланса  $dn/dt = 0$ , что в контексте (1) даёт квадратное уравнение для  $n$ . Решая это уравнение, мы находим, что  $n$  в каждой точке выражается формулой

$$n = \frac{-\sum_i \beta_i n_i + \sqrt{\left(\sum_i \beta_i n_i\right)^2 + 4\alpha q}}{2\alpha}; \quad (2)$$

в самом элементарном приближении, когда мы пренебрегаем эффектами, связанными с аэрозолями и гидрометеорами, это выражение упрощается до  $n = \sqrt{q/\alpha}$ . Проводимость атмосферы  $\sigma$  можно вычислить по формуле

$$\sigma = e_0 (\mu_+ + \mu_-) n, \quad (3)$$

где  $e_0$  — элементарный заряд, а  $\mu_{\pm}$  — подвижности положительных и отрицательных ионов (вообще говоря, несколько различные).

В теоретических исследованиях ГЭЦ проводимость часто параметризуют по следующей схеме: сначала отдельно параметризуются пространственные распределения величин  $q$ ,  $\alpha$ ,  $\beta_i$ ,  $n_i$  и  $\mu_{\pm}$ , а затем уже проводимость рассчитывается с помощью формул (2)

и (3). Из формулы (3), в частности, видно, что дополнительная ионизация увеличивает проводимость, а рост члена, связанного с прилипанием, её уменьшает.

Подвижности  $\mu_{\pm}$  и коэффициент рекомбинации  $\alpha$  обычно выражают как некоторые функции температуры и давления; если учитывается прилипание к аэрозолям, то коэффициент  $\beta_i$ , как правило, задаётся в виде функции от размера аэрозольных частиц. Соответствующие функции и зависимости берутся как из данных натуральных и лабораторных измерений, так и из результатов теоретических исследований; здесь мы не будем в это углубляться [см. подробнее, например, [Tinsley and Zhou, 2006](#); [Baumgaertner et al., 2013](#)]. Концентрации аэрозолей различных типов ( $n_i$ ) можно взять, например, из результатов расчётов соответствующих моделей; что же до прилипания к гидрометеорам в облаках, то анализ показывает, что его можно заменить умножением невозмущённой проводимости на некоторый понижающий коэффициент [[Zhou and Tinsley, 2010](#)].

Ключевым фактором, определяющим распределение проводимости в атмосфере, является скорость ионизации  $q$ . У этой величины две основных составляющих. Одна из них связана с естественной радиоактивностью земного происхождения — прежде всего с истечением радона из земной коры. Эта составляющая  $q$  имеет значение лишь непосредственно вблизи земной поверхности, поскольку спадает в  $e$  раз уже на масштабе нескольких километров [[Tinsley and Zhou, 2006](#); [Baumgaertner et al., 2013](#)]. Основная же составляющая  $q$  связана с космическими лучами — высокоэнергичными частицами, попадающими в атмосферу Земли из космоса. Прежде всего здесь имеют значение галактические космические лучи (ГКЛ), приходящие из-за пределов Солнечной системы. Определённое влияние на проводимость оказывают и выбросы энергичных частиц на Солнце, однако в среднем влияние Солнца сводится к модуляции солнечным ветром потока ГКЛ: в годы более высокой солнечной активности связанное с солнечным ветром магнитное поле снижает интенсивность потока ГКЛ, не давая частицам попасть в атмосферу Земли [[Bazilevskaya et al., 2008](#)]. Влияет на поток ГКЛ и структура геомагнитного поля: в области высоких геомагнитных широт частицам ГКЛ проще проникать в атмосферу, и значения  $q$  там выше. Пример измеренных экспериментально (с помощью зондов) вертикальных профилей  $q$  в зависимости от широты и фазы солнечного цикла показан на [рис. 2](#). В параметризациях атмосферной проводимости часть  $q$ , связанную с потоком ГКЛ, обычно описывают путём интерполяции подобных данных натуральных измерений [[Tinsley and Zhou, 2006](#)].

Если аккуратно параметризовать все величины, входящие в формулы (2) и (3), то мы сможем вычислить проводимость в каждой точке атмосферы. Разумеется, из-за сказанного выше об ионизации со стороны ГКЛ проводимость будет некоторым образом зависеть от геомагнитной широты и фазы солнечного цикла (более высоким широтам и более низкой солнечной активности будут соответствовать большие значения проводимости). Однако наиболее важным трендом в распределении проводимости является

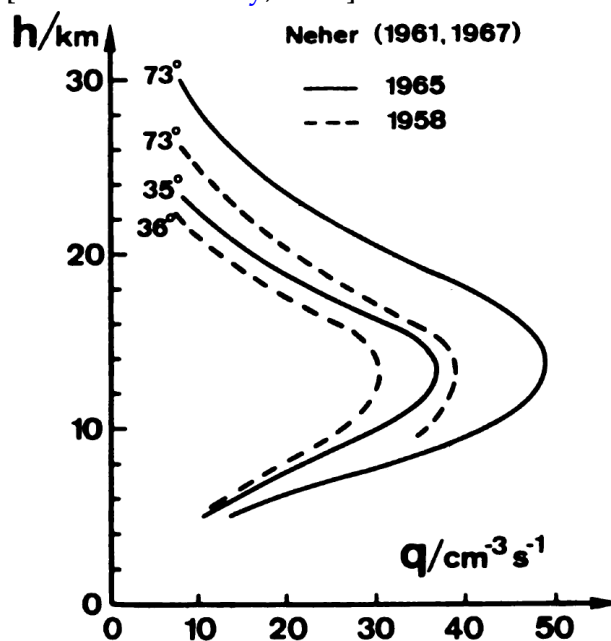


Рис. 2. Зависимость скорости ионизации (по горизонтали в  $\text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$ ) от высоты (по вертикали в км) для различных широт в годы максимума (1958) и минимума (1965) 11-летнего цикла солнечной активности. Рисунок из работы [Gringel et al. \[1986\]](#) по данным измерений из работ [Neher \[1961, 1967\]](#).

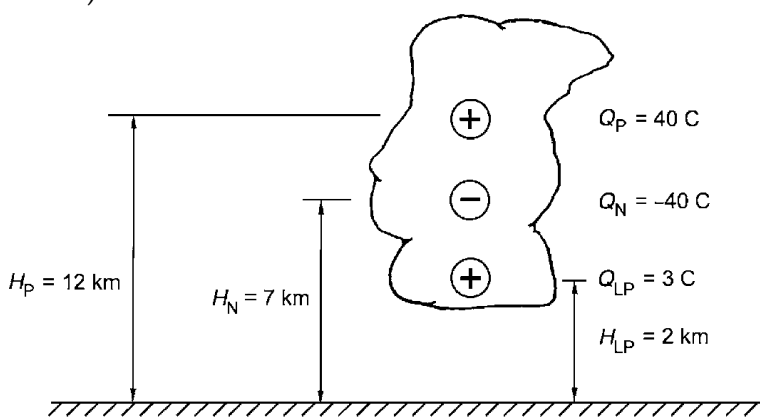
её быстрый (близкий к экспоненциальному) рост с высотой [см., например, [Tinsley and Zhou, 2006](#)]. Это позволяет во многих задачах об атмосферном электричестве использовать для оценок распределение проводимости, определяемое простым экспоненциальным профилем

$$\sigma(z) = \sigma_0 \exp\left(\frac{z}{D}\right), \quad (4)$$

где  $z$  — высота над уровнем моря,  $\sigma_0$  — приземное значение проводимости (50 фСм/м по порядку величины), а  $D$  — характерный вертикальный масштаб (порядка 6 км). Конечно, такой профиль упрощает реальную ситуацию, однако он хорошо передаёт принципиальную суть тренда проводимости.

## § 2. Разделение зарядов в облаках и сторонний ток

ГЭЦ постоянного тока поддерживается за счёт процессов зарядки, непрерывно протекающих в электрически активных облаках. К таким облакам относятся грозовые облака, облака без молний с развитой электрической структурой (в англоязычной литературе их называют «electrified shower clouds», устоявшегося русского термина нет), а также так называемые мезомасштабные конвективные системы (крупномасштабные области осадков протяжённостью до сотен километров, включающие в себя конвективную и слоистую часть).



**Рис. 3.** Схематичное изображение трёхполюсной структуры грозового облака; указаны характерные заряды (в Кл) и высоты (в км). Рисунок из книги [Rakov and Uman \[2003, гл. 3\]](#).

Электрическую структуру большинства электрически активных облаков можно считать трёхполюсной с выделенными областями положительного заряда в верхней части облака и отрицательного заряда ниже него, а также с дополнительной областью положительного заряда вблизи нижней границы облака (этот заряд меньше по величине, чем два других). Схематически такая структура распределения заряда показана на [рис. 3](#). Разумеется, это некоторое упрощение реальной ситуации: реальная структура распределения

заряда в облаках может варьироваться и быть гораздо более сложной.

Вопрос о физических механизмах разделения зарядов в электрически активных облаках довольно сложен и до конца не выяснен; на этот счёт существует множество различных гипотез и теорий [см. подробнее, например, [Krehbiel, 1986](#); [Rakov and Uman, 2003, гл. 3](#)]. Наиболее важным механизмом зарядки принято считать механизм, основанный на безындукционных (то есть без влияния внешнего электрического поля) столкновениях гидрометеоров различных типов в области смешанной фазы внутри облака. В этой области одновременно присутствуют крупные частицы снежной крупы (падающие вниз осадки), меньшие в размерах кристаллы льда (облачные частицы) и переохлаждённые капли воды. Разделение частиц осадков и облачных частиц происходит под действием гравитации, а наличие переохлаждённой воды оказывается необходимым для эффективного переноса заряда. Известно, что падающие вниз частицы снежной крупы при столкновениях с облачными кристаллами льда приобретают отрицательный заряд, если температура ниже так называемой точки реверса, и положительный заряд, если

температура выше неё (по поводу физических механизмов такого поведения есть различные теории). Первая ситуация имеет место в верхней части облака, а вторая — в нижней; с этим связывают формирование верхнего положительного заряда и отрицательного заряда в облаке (схематично это показано на рис. 4). Нижний положительный заряд (равно как и некоторую часть отрицательного заряда) часто связывают с падающими частицами осадков. Следует, однако, отметить, что такое описание является сильно упрощённым и не объясняет имеющиеся наблюдения в полной мере [Rakov and Uman, 2003, гл. 3].

С точки зрения теоретического описания ГЭЦ постоянного тока процессы разделения зарядов в облаке можно описать как некий сторонний ток  $\mathbf{J}$ , который входит в закон Ома как дополнительное по отношению к току проводимости слабое:

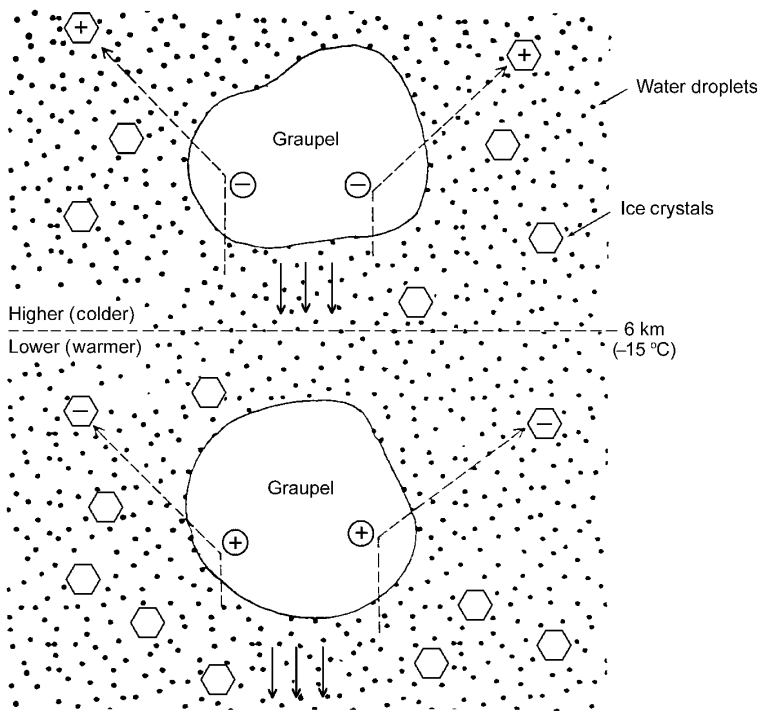


Рис. 4. Схематическая иллюстрация безындукционного механизма зарядки, связанного со столкновениями частиц падающей снежной крупы (крупные) с облачными кристаллами льда (шестиугольные) в присутствии переохлаждённых капель воды (точки). Рисунок из книги Rakov and Uman [2003, гл. 3].

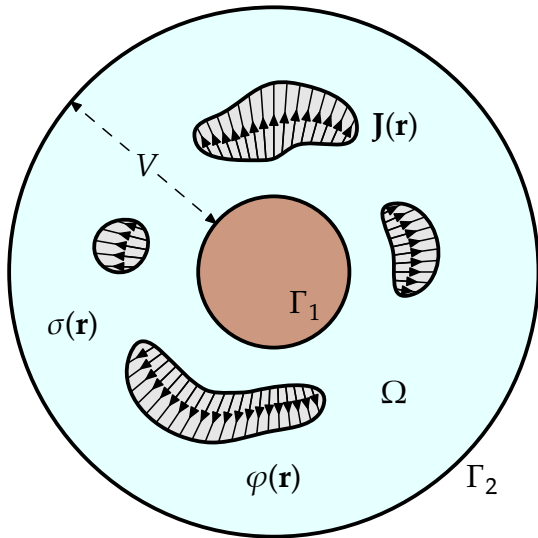
$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{j}$  — электрический ток,  $\sigma$  — проводимость,  $\mathbf{E}$  — напряжённость электрического поля. В простейшем случае мы можем пренебречь наличием нижнего положительного заряда и описывать каждое электрически активное облако как токовый диполь, сторонний ток  $\mathbf{J}$  внутри которого чисто вертикален и направлен вверх (в соответствии с расположением основного положительного заряда выше отрицательного).

### § 3. Уравнения глобальной электрической цепи постоянного тока

Теперь мы можем перейти непосредственно к изучению ГЭЦ постоянного тока. Как уже отмечалось, ГЭЦ постоянного тока — это распределённый токовый контур, образованный атмосферой, проводимость которой мала в пограничном слое, но экспоненциально растёт с высотой, и высокопроводящими верхними слоями земной коры и океана [Анисимов и Мареев, 2008; Rycroft et al., 2008; Williams, 2009; Мареев, 2010; Williams and Mareev, 2014]. Функционирование ГЭЦ поддерживается процессами разделения зарядов в грозных облаках; в результате квазистационарный электрический ток течёт вверх в областях грозы и течёт вниз в областях хорошей погоды, а высокопроводящие поверхность Земли и ионосфера замыкают токовый контур (см. рис. 1а). Гипотеза о том, что грозные облака поддерживают квазистационарное распределение тока в атмосфере, была впервые выдвинута Вильсоном в начале 20-го века [Wilson, 1921]; дальнейшие исследования позволили включить в число источников ГЭЦ, помимо грозных облаков, и другие облака с развитой электрической структурой.





**Рис. 5.** Геометрия задачи о ГЭЦ постоянного тока. Стрелками схематически показано распределение плотности тока источников  $\mathbf{J}$ , отличной от нуля только внутри облаков с развитой электрической структурой.

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — напряжённости электрического и магнитного полей соответственно,  $\mathbf{J}$  — плотность стороннего тока,  $\sigma$  — проводимость,  $\rho$  — плотность заряда,  $c$  — скорость света (здесь и далее мы записываем все уравнения в гауссовой системе единиц). Предполагается, что входящий сюда сторонний ток  $\mathbf{J}$  описывает процесс разделения зарядов в электрически активных облаках, и потому в каждый момент времени его пространственное распределение отвечает пространственному положению грозовых облаков (см. рис. 5).

Уравнения (6)–(9) необходимо дополнить подходящими граничными условиями. Мы уже отмечали, что проводимость в атмосфере в целом экспоненциально растёт с высотой; кроме того, проводимость Земли существенно выше, чем проводимость приземного воздуха. Поэтому обычно приближённо считают, что обе границы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  являются идеальными проводниками, так что мы имеем граничные условия

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_1} = 0, \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = 0, \quad (10)$$

где  $\mathbf{n}$  обозначает внешнюю нормаль к границе области  $\Omega$  (иными словами, эти условия требуют равенства нулю тангенциальной компоненты поля  $\mathbf{E}$  на всей границе).

При заданных  $\sigma$  и  $\mathbf{J}$  соотношения (6), (7) и (10) образуют систему уравнений относительно  $\mathbf{E}$  и  $\text{rot } \mathbf{H}$ . Если мы каким-либо образом найдём  $\text{rot } \mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$ , мы можем отыскать само магнитное поле  $\mathbf{H}$ , а также пространственную плотность электрического заряда  $\rho$  из уравнений (8) и (9) при условии, что для  $\mathbf{H}$  заданы необходимые граничные условия. Поэтому для решения исходной системы уравнений (6)–(9) достаточно найти поле  $\mathbf{E}$  (на самом деле  $\mathbf{H}$  нас не будет интересовать). Из уравнения (6) вытекает пара уравнений ( $ds$  указывает на интегрирование по поверхности)

$$\text{div}(\sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}) = 0, \quad (11)$$

$$\oint_{\Gamma_1} (\sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}) \cdot \mathbf{n} ds = 0. \quad (12)$$

Уравнение (7) позволяет нам ввести потенциал электрического поля, то есть такую функцию  $\varphi$ , что  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ . С математической точки зрения это возможно, поскольку

Получим уравнения ГЭЦ постоянного тока. Мы предполагаем, что атмосфера занимает в пространстве область  $\Omega$ , граница которой состоит из двух частей — поверхности Земли  $\Gamma_1$  и поверхности  $\Gamma_2$ , охватывающей  $\Gamma_1$  и отстоящей от неё на некоторое расстояние (см. рис. 5). Мы также считаем, что диэлектрическая и магнитная проницаемости атмосферы равны 1, а все величины меняются во времени достаточно медленно для того, чтобы можно было пренебречь производными по времени в уравнениях Максвелла. В этом случае уравнения Максвелла с учётом материального соотношения (5) записываются в виде

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} (\sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}), \quad (6)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad (7)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (8)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (9)$$

область  $\Omega$  односвязна (то есть любой лежащий в ней замкнутый контур можно стянуть в точку); в этом случае (7) гарантирует, что интеграл от  $\mathbf{E}$  между двумя точками не будет зависеть от пути интегрирования. Введя потенциал  $\varphi$ , мы можем переписать через него уравнения (10)–(12). Граничные условия (10) означают, что  $\varphi$  не меняется на каждой из двух компонент границы, и если мы положим  $\varphi = 0$  на  $\Gamma_1$ , то значение  $\varphi$  на  $\Gamma_2$  будет некоторой константой  $V$ . Таким образом, мы приходим к следующей системе уравнений:

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \varphi) = \operatorname{div} \mathbf{J}, \quad (13)$$

$$\oint_{\Gamma_1} \sigma \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{n} ds = \oint_{\Gamma_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} ds, \quad (14)$$

$$\varphi|_{\Gamma_1} = 0, \quad \varphi|_{\Gamma_2} = V; \quad (15)$$

здесь  $V$  — неизвестная постоянная.

#### § 4. Единственность решения задачи

Система уравнений (13)–(15) может показаться несколько непривычной, поскольку содержит дополнительное интегральное условие (14), а в граничные условия входит неизвестная константа. Такая особенность связана с необычной топологией области  $\Omega$ , граница которой состоит из двух компонент связности. Покажем сейчас, что задача (13)–(15) действительно допускает не более одного решения (и константа  $V$ , таким образом, всегда может быть однозначно определена).

Итак, пусть уравнения (13)–(15) при фиксированных  $\sigma$  и  $\mathbf{J}$  допускают два различных решения:  $\varphi^{(1)}$  с константой  $V^{(1)}$  и  $\varphi^{(2)}$  с константой  $V^{(2)}$ . Обозначая  $\delta\varphi = \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}$  и вычитая уравнения для  $\varphi^{(2)}$  из соответствующих уравнений для  $\varphi^{(1)}$ , мы приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \delta\varphi) &= 0, \\ \oint_{\Gamma_1} \sigma \operatorname{grad} \delta\varphi \cdot \mathbf{n} ds &= 0, \\ \delta\varphi|_{\Gamma_1} &= 0, \quad \delta\varphi|_{\Gamma_2} = \delta V, \end{aligned}$$

где  $\delta V = V^{(1)} - V^{(2)}$ . Дважды пользуясь классической интегральной формулой для перехода между интегралами от дивергенции и интегралами по границе, мы можем записать следующую цепочку равенств (напомним, что мы определяли  $\mathbf{n}$  как внешнюю нормаль к обоим компонентам границы  $\Omega$ ;  $d\mathbf{r}$  указывает на интегрирование по объёму):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \operatorname{grad} \delta\varphi \cdot \operatorname{grad} \delta\varphi d\mathbf{r} &= \\ &= - \int_{\Omega} \delta\varphi \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \delta\varphi) d\mathbf{r} + \oint_{\Gamma_1} \delta\varphi \sigma \operatorname{grad} \delta\varphi \cdot \mathbf{n} ds + \oint_{\Gamma_2} \delta\varphi \sigma \operatorname{grad} \delta\varphi \cdot \mathbf{n} ds = \\ &= \delta V \oint_{\Gamma_2} \sigma \operatorname{grad} \delta\varphi \cdot \mathbf{n} ds = -\delta V \oint_{\Gamma_1} \sigma \operatorname{grad} \delta\varphi \cdot \mathbf{n} ds + \delta V \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \delta\varphi) d\mathbf{r} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда мы получаем равенство

$$\int_{\Omega} \sigma |\operatorname{grad} \delta\varphi|^2 d\mathbf{r} = 0,$$

откуда  $\operatorname{grad} \delta\varphi \equiv 0$ . Из условия  $\delta\varphi|_{\Gamma_1} = 0$  мы получаем  $\delta\varphi \equiv 0$ , то есть  $\varphi^{(1)} \equiv \varphi^{(2)}$  и  $V^{(1)} = V^{(2)}$ .

## § 5. Ионосферный потенциал и формула для него

Итак, мы показали, что константа  $V$  всегда может быть однозначно определена из системы уравнений (13)–(15). Эта константа представляет собой разность потенциалов между поверхностью Земли и нижней ионосферой — так называемый ионосферный потенциал. Ионосферный потенциал является, вероятно, наиболее фундаментальной количественной характеристикой ГЭЦ постоянного тока.

Удобно представлять решение задачи (13)–(15) в виде пары  $(\varphi, V)$ . Если при фиксированном распределении проводимости  $\sigma$  пара  $(\varphi^{(1)}, V^{(1)})$  — решение задачи, отвечающее источнику  $\mathbf{J}^{(1)}$ , а пара  $(\varphi^{(2)}, V^{(2)})$  — решение задачи, отвечающее источнику  $\mathbf{J}^{(2)}$ , то, очевидно, источнику  $\mathbf{J}^{(1)} + \mathbf{J}^{(2)}$  будет отвечать решение  $(\varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}, V^{(1)} + V^{(2)})$  — и только оно в силу единственности. Это даёт нам некоторый принцип суперпозиции и позволяет говорить о вкладах в ГЭЦ и в ионосферный потенциал, например, со стороны отдельных электрически активных облаков или со стороны облаков над конкретными областями земной поверхности.

Оказывается, что в некоторых простых случаях ионосферный потенциал можно вычислить аналитически. Мы можем считать, что область  $\Omega$ , заключающая в себе атмосферу, сферически симметрична, а две компоненты границы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  суть концентрические сферы (см. рис. 5). Мы введём сферические координаты  $(r, \vartheta, \psi)$  ( $0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \psi < 2\pi$ ) так, чтобы точка  $r = 0$  соответствовала общему центру обеих сфер (то есть центру Земли). Мы будем предполагать, что поверхность  $\Gamma_1$  описывается уравнением  $r = R_0$ , а поверхность  $\Gamma_2$  — уравнением  $r = R_1$ , где  $R_1 > R_0$ ; таким образом,

$$\Omega = \{(r, \vartheta, \psi): R_0 < r < R_1\}.$$

Рассмотрим задачу (13)–(15) в области  $\Omega$  в случае, когда проводимость  $\sigma$  зависит только от радиальной координаты  $r$  (это справедливо, в частности, для профиля проводимости (4), в котором для перехода к сферическим координатам нужно положить  $z = r - R_0$ ). Чтобы получить формулу для ионосферного потенциала, заметим, что из (13) и (14) следует, что при любом  $r \in [R_0, R_1]$

$$\oint_{\Gamma(r)} \sigma \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{n} ds = \oint_{\Gamma(r)} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} ds,$$

где  $\Gamma(r)$  есть сфера радиуса  $r$  с центром в начале координат, а  $\mathbf{n}$  обозначает нормаль к ней. Перепишем это соотношение в координатах (мы опускаем множитель  $r^2$ ):

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sigma(r) \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \vartheta, \psi) \sin \vartheta d\vartheta d\psi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi J_r(r, \vartheta, \psi) \sin \vartheta d\vartheta d\psi;$$

деля теперь обе части равенства на  $\sigma(r)$ , интегрируя по  $r$  от  $R_0$  до  $R_1$  и используя очевидное соотношение

$$V = \int_{R_0}^{R_1} \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \vartheta, \psi) dr,$$

мы получаем формулу для ионосферного потенциала

$$V = \int_{R_0}^{R_1} \frac{1}{4\pi\sigma(r)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi J_r(r, \vartheta, \psi) \sin \vartheta d\vartheta d\psi dr.$$

Заметим, что полученное выражение можно интерпретировать как обобщённый закон Ома для ГЭЦ (впрочем, в случае произвольной зависимости  $\sigma(r, \vartheta, \psi)$  записать аналогичное выражение затруднительно).



## § 6. Измерения параметров глобальной электрической цепи. Кривая Карнеги

Основные характеристики ГЭЦ, которые могут быть измерены и измеряются экспериментально, — это ионосферный потенциал и приземное электрическое поле в области хорошей погоды. Несомненно, ионосферный потенциал является наиболее естественной количественной мерой интенсивности ГЭЦ. Характерные значения ионосферного потенциала — 200–300 кВ; его можно экспериментально определить, промерив профиль вертикальной компоненты электрического поля с помощью зонда или самолёта, а затем проинтегрировав эту компоненту по высоте [Markson, 2007].

Обычно интегрирование проводится от поверхности Земли до высоты порядка 20 км: в области хорошей погоды почти всё изменение электрического потенциала происходит в этом диапазоне высот. Как и следовало ожидать, одновременные измерения этой величины в удалённых друг от друга точках земной поверхности дают близкие результаты, что является важным экспериментальным свидетельством в пользу концепции ГЭЦ. Пример приведён на рис. 6: разные профили поля в двух точках после интегрирования дают значения ионосферного потенциала одного порядка.

Однако измерения ионосферного потенциала довольно сложны и дороги. Гораздо проще и дешевле измерять электрическое поле на поверхности Земли в дни хорошей погоды. Поскольку это поле, величина которого составляет порядка 100–200 В/м, определяется глобальной совокупностью электрически активных облаков по всей Земле, то оно тоже в некоторой степени может характеризовать ГЭЦ постоянного тока. Проблема заключается в том, что приземное электрическое поле обычно существенным образом зависит от локальных факторов, в частности от возмущений проводимости (например, из-за радона или аэрозолей). В меньшей степени этим проблемам подвержены измерения в чистых условиях, например на корабле в океане или в Антарктиде на Полярном плато.

В связи с этим уместно упомянуть о важной вехе в исследованиях атмосферного электричества — измерениях электрического поля на корабле «Карнеги» в 1915–1929 годах в Тихом, Атлантическом и Индийском океанах [Ault and Mauchly, 1926; Torreson et al., 1946; см. также Harrison, 2013] и на корабле «Мод» в 1922–1925 годах в Северном Ледовитом океане [Sverdrup, 1926]. Главный результат, полученный в ходе этих исследований, состоит в том, что усреднённая кривая зависимости электрического поля от абсолютно-го времени (UTC) имеет приблизительно одинаковый вид для различных точек земной поверхности [Mauchly, 1923]; этот вид показан на рис. 7 вверху. Впоследствии эта кривая получила название кривой Карнеги.

Традиционная интерпретация кривой Карнеги основана на отмеченной корреляции данной кривой (то есть графика усреднённой суточной вариации приземного поля хорошей погоды) с графиком суточной вариации глобальной грозовой активности [Whipple and Scrase, 1936]. Эта корреляция наглядно показана на рис. 7 (более

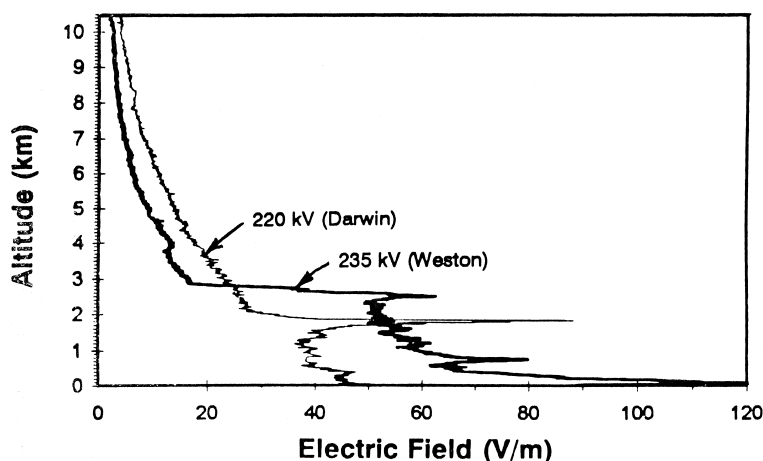
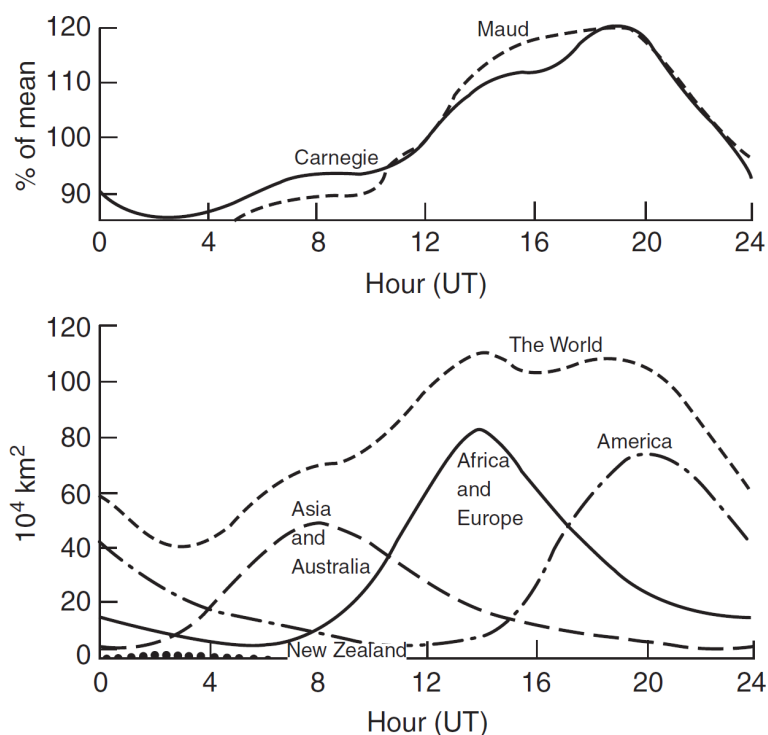


Рис. 6. Одновременно измеренные в двух удалённых друг от друга точках профили электрического поля (по горизонтали в В/м) в зависимости от высоты (по вертикали в км). Рисунок из статьи Markson et al. [1999].



**Рис. 7.** Зависимость электрического поля хорошей погоды, измеренного на кораблях «Карнеги» и «Мод» (вверху, по вертикали в процентах от среднего), и площади, занятой грозовой активностью на всей Земле и в отдельных её регионах (внизу, по вертикали в  $10^4 \text{ км}^2$ ), от универсального времени (по горизонтали в часах). Рисунок из статьи Williams [2015] на основе рисунка из работы Whipple and Scrase [1936].

Отметим в заключение, что можно также измерять плотность тока хорошей погоды, которая в теории не должна быть подвержена влиянию локальных возмущений проводимости в той же мере, что и электрическое поле. Однако характерные значения этой плотности тока довольно малы (несколько  $\text{пА/м}^2$ ), что делает такие измерения чрезвычайно сложными.

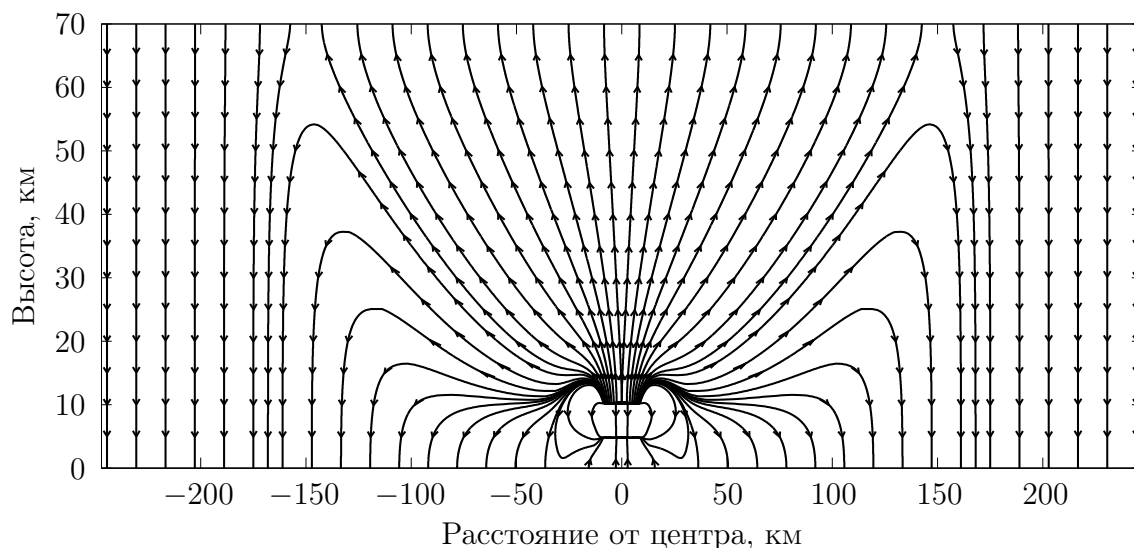
## § 7. Столбцовые модели глобальной электрической цепи

«Входными данными» в задаче (13)–(15) являются распределения проводимости  $\sigma$  и плотности стороннего тока  $\mathbf{J}$  (причём последняя отлична от нуля лишь внутри электрически активных облаков, так что, вообще говоря, уже в соотношении (14) правую часть можно было бы не писать), а «на выходе» мы имеем распределение потенциала  $\varphi$  и ионосферный потенциал  $V$ . Так что если мы зададим каким-то образом распределение электрически активных облаков в атмосфере и свяжем с ними вертикально (в контексте сферической системы координат — радиально) направленный сторонний ток, то мы сможем попытаться решить задачу (13)–(15) и найти распределение потенциала во всей атмосфере. Это приводит нас к задаче о теоретическом моделировании ГЭЦ.

Задачу (13)–(15) можно пытаться решать численно различными методами (например, методом конечных элементов). На рис. 8 показана рассчитанная таким образом картина силовых линий электрического поля в окрестности одного модельного облака с поперечным размером около 20 км [Калинин и др., 2014]. Однако ясно, что полноценное глобальное трёхмерное моделирование ГЭЦ постоянного тока с детальным описанием

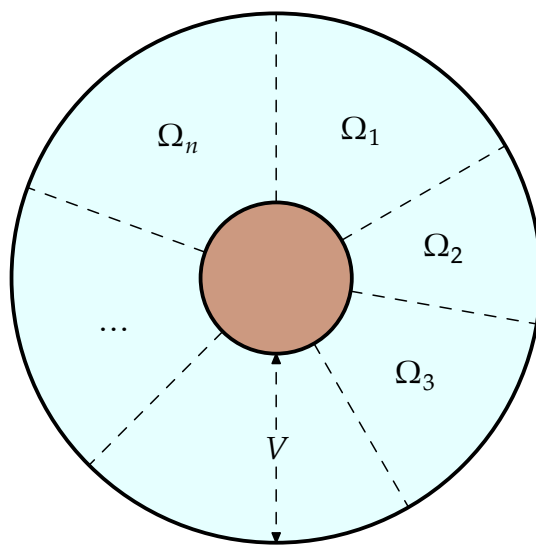
современный анализ также подтверждают это). Такая интерпретация позволяет рассматривать форму кривой Карнеги как суперпозицию суточных циклов грозовой активности над различными континентами (см. рис. 7), каждый из которых имеет выраженный максимум около 15:00–17:00 по местному времени в силу общих закономерностей поведения конвекции над сушей. Это является ещё одно важное подтверждение справедливости концепции ГЭЦ, в которой распределение полей и токов во всей атмосфере поддерживается электрически активными облаками — в первую очередь грозowymi генераторами. Различие амплитуд двух графиков на рис. 7 обычно объясняется присутствием в числе генераторов ГЭЦ, наряду с грозowymi облаками, негрозowych облаков с развитой электрической структурой (строго говоря, следовало бы рассматривать не площадь грозовой активности, а вклады в ионосферный потенциал).

растекания тока в окрестности всех подобных облаков-источников (которых, как принято считать, в каждый момент времени на Земле порядка нескольких тысяч) на сегодняшний день выглядит практически нерешаемой задачей — как из-за вычислительных трудностей, так и из-за невозможности с достаточной точностью параметризовать все необходимые физические явления.



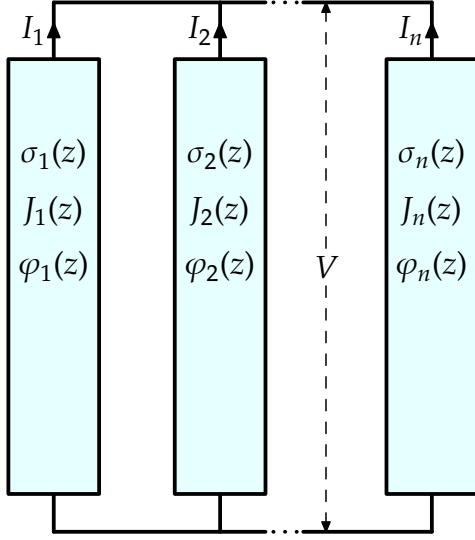
**Рис. 8.** Рассчитанная картина силовых линий электрического поля в окрестности модельного облака с поперечным размером около 20 км. Рисунок из статьи [Калинин и др. \[2014\]](#).

Однако почти для всех глобальных задач, связанных с ГЭЦ, такая точность описания и не требуется: на практике нас обычно интересует ионосферный потенциал, региональные вклады в него либо электрическое поле в области хорошей погоды (далеко от всех источников), причём даже не сами значения, а их динамика во времени (при изменении источников). Для вычисления этих величин можно воспользоваться крупномасштабным описанием всех процессов: разбить всю модельную атмосферу  $\Omega$  на отдельные крупномасштабные столбцы  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$  (рис. 9), пренебречь «поперечными» токами в атмосфере (за исключением токов на поверхностях  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ ) и аппроксимировать задачу одномерной в каждом столбце. Возможность такого описания ГЭЦ следует из многочисленных экспериментальных и теоретических исследований: известно, что в целом в областях источников ток течёт вверх, а в областях хорошей погоды ток течёт вниз. Более сложная структура растекания тока в окрестности облаков — источников ГЭЦ (см. рис. 8) компенсируется введением эффективных значений плотности тока зарядки; влияние прочих неоднородностей также снижается при глобальном усреднении.



**Рис. 9.** Схематическое разбиение модельной атмосферы на столбцы.

После разбиения атмосферы на столбцы и перехода к одномерной аппроксимации задаче о ГЭЦ соответствует схема, приведённая на рис. 10. Пусть в  $i$ -ом столбце проводимость, вертикальная компонента плотности тока зарядки и потенциал описываются



**Рис. 10.** Геометрия столбцовой модели ГЭЦ постоянного тока в наиболее общей ситуации.

функциями  $\sigma_i(z)$ ,  $J_i(z)$  и  $\varphi_i(z)$ ; тогда уравнение непрерывности (13) можно записать в виде

$$\frac{d}{dz} \left( -\sigma_i(z) \frac{d\varphi_i(z)}{dz} + J_i(z) \right) = 0,$$

откуда

$$-\sigma_i(z) \frac{d\varphi_i(z)}{dz} + J_i(z) = \frac{I_i}{S_i},$$

где  $S_i$  — площадь соответствующего столбца, а  $I_i$  — соответствующий вертикальный ток, не зависящий от высоты; отсюда, в частности, ясно, что условие (14) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0. \quad (16)$$

Далее, интегрируя соотношение

$$\frac{d\varphi_i(z)}{dz} = \frac{J_i(z)}{\sigma_i(z)} - \frac{I_i}{S_i \sigma_i(z)} \quad (17)$$

от поверхности Земли  $z = 0$  до внешней границы атмосферы  $z = H$  (где  $H = R_1 - R_0$ ) с учётом граничных условий (15), мы получаем

$$V = \int_0^H \frac{J_i(z) dz}{\sigma_i(z)} - \frac{I_i}{S_i} \int_0^H \frac{dz}{\sigma_i(z)}. \quad (18)$$

Исключая с помощью (16) токи из уравнений (18), нетрудно получить формулу для ионосферного потенциала:

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{S_i \int_0^H \frac{J_i(z) dz}{\sigma_i(z)}}{\int_0^H \frac{dz}{\sigma_i(z)}} / \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{\int_0^H \frac{dz}{\sigma_i(z)}}. \quad (19)$$

## § 8. Эквивалентный электрический контур

Формула (19) действительно выражает ионосферный потенциал в терминах проводимости и плотности тока зарядки. Следует, однако, понимать, что сама запись (19) описывает наиболее общую ситуацию, когда в каждом столбце модельной атмосферы заданы функции  $\sigma_i(z)$  и  $J_i(z)$ . На практике сторонние токи обычно параметризуют ступенчатой функцией вида

$$J_i(z) = \begin{cases} J_{0i}, & z_i^- < z < z_i^+, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $J_{0i}$  — константа, а  $z_i^-$  и  $z_i^+$  — нижняя и верхняя границы области, в которой происходит разделение зарядов в  $i$ -ом столбце (то есть области смешанной фазы внутри облака). Это

сводит формулу (19) к

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{S_i J_{0i} \int_{z_i^-}^{z_i^+} \frac{dz}{\sigma_i(z)}}{\int_0^H \frac{dz}{\sigma_i(z)}} / \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{\int_0^H \frac{dz}{\sigma_i(z)}}. \quad (20)$$

Разумеется, в реальности в столбцах, соответствующих области хорошей погоды,  $J_{0i} = 0$ , поэтому они не дают вклада в числитель формулы (20).

Столбцовое представление ГЭЦ, изображённое на рис. 10, может быть представлено в виде эквивалентного электрического контура, приведённого на рис. 11. Закон Ома вида

$$\mathbf{j} = -\sigma \text{grad } \varphi + \mathbf{J},$$

или

$$-\text{grad } \varphi = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{\mathbf{J}}{\sigma'},$$

приводит к тому, что в каждом столбце область источников можно представить в виде параллельно соединённых источника тока, поддерживающего ток  $I_{0i}$ , и резистора с сопротивлением  $R_{2i}$ . В то же время области ниже области источников и области выше области источников соответствуют резисторы с сопротивлениями  $R_{1i}$  и  $R_{3i}$  соответственно. В терминах  $\sigma_i(z)$  и  $J_{0i}$  эти величины можно выразить как

$$I_{0i} = J_{0i} S_i, \quad R_{1i} = \frac{1}{S_i} \int_0^{z_i^-} \frac{dz}{\sigma_i(z)}, \quad R_{2i} = \frac{1}{S_i} \int_{z_i^-}^{z_i^+} \frac{dz}{\sigma_i(z)}, \quad R_{3i} = \frac{1}{S_i} \int_{z_i^+}^H \frac{dz}{\sigma_i(z)}.$$

Записывая для ветвей эквивалентной электротехнической схемы, изображённой на рис. 11, правила Кирхгофа, мы получаем  $n$  уравнений вида

$$-V = I_i R_{1i} + (I_i - I_{0i}) R_{2i} + I_i R_{3i},$$

а также уравнение (16). Находя из этих уравнений  $V$ , мы приходим к формуле

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{I_{0i} R_{2i}}{R_{1i} + R_{2i} + R_{3i}} / \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_{1i} + R_{2i} + R_{3i}},$$

которая представляет собой просто другую запись выражения (20). Отсюда ясно, что, по существу, формула (19) выражает значение разности потенциалов, определяемое правилами Кирхгофа для электрического контура, изображённого на рис. 11.

Если ещё больше упростить описание ГЭЦ и сгруппировать все области электрически активных облаков в один столбец, а все области хорошей погоды в другой, то получится эквивалентная схема, показанная на рис. 12. Благодаря своей наглядности такая простая схема иногда может быть полезна для качественного анализа задач об атмосферном электричестве.

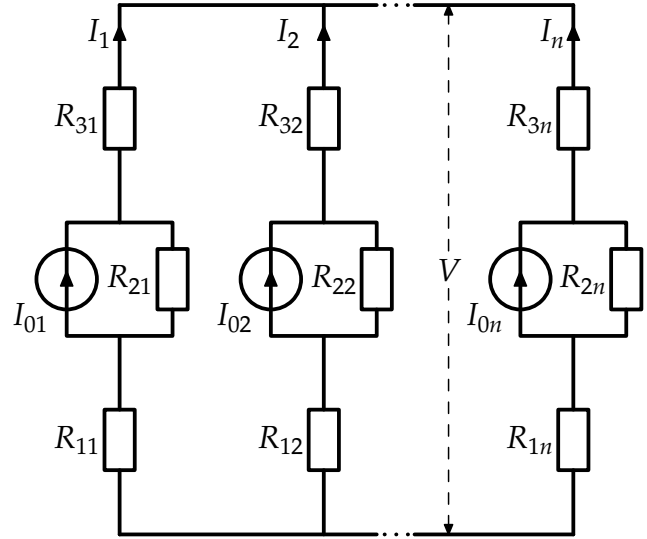


Рис. 11. Эквивалентная электротехническая схема для столбцовой модели ГЭЦ в общей ситуации.



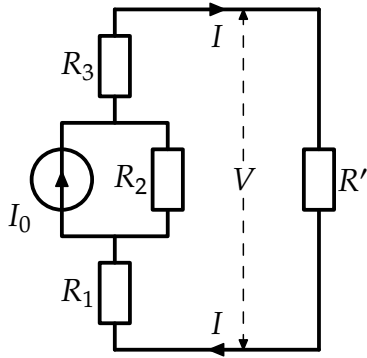


Рис. 12. Простейшая электротехническая схема, описывающая ГЭЦ.

Например, с помощью схемы рис. 12 нетрудно оценить многие параметры ГЭЦ, зная характерные значения ионосферного потенциала. Мы можем воспользоваться тем, что электрически активные облака покрывают лишь очень малую часть земной поверхности, и приближённо заменить площадь области хорошей погоды на полную площадь поверхности Земли  $S_0$ . Тогда, приняв экспоненциальный профиль проводимости (4), мы можем оценить сопротивление области хорошей погоды:

$$R' \approx \frac{1}{S_0} \int_0^H \frac{dz}{\sigma(z)} = \frac{D}{\sigma_0 S_0} \left( 1 - \exp\left(-\frac{H}{D}\right) \right) \approx \frac{D}{\sigma_0 S_0},$$

где мы воспользовались тем, что отношение  $H/D$  достаточно большое. Несложное вычисление даёт значение  $R'$  порядка 200 Ом; поскольку ионосферный потенциал  $V$  составляет порядка 200–300 кВ, мы получаем отсюда полный ток в ГЭЦ  $I = V/R' = V\sigma_0 S_0/D$  порядка 1 кА и плотность тока хорошей погоды  $j = I/S_0 = V\sigma_0/D$  порядка 2 пА/м<sup>2</sup>. Отсюда, в частности, следует оценка для величины приземного электрического поля хорошей погоды  $E = j/\sigma_0 = V/D$ , что даёт порядка 50 В/м. Это значение несколько ниже, чем встречающиеся на практике, однако этому не следует удивляться, поскольку профиль проводимости (4) всё-таки существенно упрощает реальную ситуацию.

## § 9. Заряд Земли и распределение заряда в атмосфере

Полный заряд Земли  $Q$  можно выразить по теореме Гаусса через приземное электрическое поле (напомним, что  $\mathbf{n}$  у нас обозначает внешнюю нормаль к границе области  $\Omega$ ):

$$Q = -\frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} ds = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} E_r ds. \quad (21)$$

Известно, что в областях хорошей погоды электрическое поле у поверхности Земли направлено вниз, а его величина составляет порядка 100 В/м. Часто можно услышать следующее рассуждение: поскольку электрически активные облака (источники ГЭЦ) занимают очень небольшую долю площади земной поверхности, то можно ими пренебречь, умножить это значение на площадь поверхности Земли  $4\pi R_0^2$  и оценить таким образом интеграл в формуле (21); в результате получится значение заряда Земли порядка  $-5 \cdot 10^5$  Кл. Это рассуждение ошибочно: хотя электрически активные облака и занимают лишь малую часть земной поверхности, электрическое поле под ними на порядки больше, чем поле хорошей погоды, так что пренебрегать этой областью при оценках никак нельзя.

Поскольку мы предполагаем отсутствие сторонних токов вне электрически активных облаков, то формулу (12) можно переписать в виде

$$-\oint_{\Gamma_1} \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} ds = \oint_{\Gamma_1} \sigma E_r ds = 0;$$

если считать проводимость на поверхности Земли постоянной, то отсюда немедленно будет следовать равенство нулю заряда, определяемого формулой (21). Разумеется, в реальности проводимость зависит от широты и долготы, к тому же на неё могут влиять

различные локальные факторы; по этой причине трудно уверенно говорить даже о знаке суммарного заряда Земли — не то что о его величине.

Не следует также думать, что заряд в ГЭЦ постоянного тока сосредоточен только на граничных поверхностях  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — подобно заряду на обкладках конденсатора в электростатике. Зная (с какой-то точностью) распределение потенциала в атмосфере, мы всегда можем найти пространственную плотность заряда из уравнения (9). Например, для столбцовой аппроксимации ГЭЦ, показанной на рис. 10, мы можем воспользоваться (17) и выразить плотность заряда в  $i$ -ом столбце как

$$\rho_i(z) = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dz} \left( -\frac{d\varphi_i}{dz} \right) (z) = \frac{I_i}{4\pi S_i} \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\sigma_i} \right) (z) - \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dz} \left( \frac{J_i}{\sigma_i} \right) (z).$$

Интегрируя это уравнение и пользуясь тем, что  $J_i(z) \neq 0$  лишь внутри облаков — источников ГЭЦ, мы можем рассчитать суммарный заряд в столбе воздуха:

$$Q_i = S_i \int_0^H \rho_i(z) dz = \frac{I_i}{4\pi} \left( \frac{1}{\sigma_i(H)} - \frac{1}{\sigma_i(0)} \right). \quad (22)$$

При этом плотность заряда на поверхности Земли  $z = 0$  (определяемую, как обычно, скачком электрического поля) опять-таки в силу (17) можно выразить как

$$s_i = \frac{1}{4\pi} \left( -\frac{d\varphi_i}{dz} \right) (0) = \frac{I_i}{4\pi S_i} \frac{1}{\sigma_i(0)}. \quad (23)$$

Это означает, что в рамках столбцовой модели суммарный заряд на поверхности Земли в  $i$ -ом столбце  $s_i S_i$  практически полностью компенсируется зарядом  $Q_i$  соответствующего столба атмосферы (напомним, что  $\sigma_i(H) \gg \sigma_i(0)$  в силу экспоненциального роста проводимости с высотой; небольшая разница между  $s_i S_i$  и  $Q_i$  в такой модели связана с зарядом на условно поставленной внешней границе  $z = H$ ).

Глядя ещё раз на уравнения (22) и (23), мы видим, что в областях источников ГЭЦ (где  $I_i > 0$ ) суммарный заряд столба атмосферы отрицателен, а заряд на поверхности Земли положителен. В областях же хорошей погоды (где  $I_i < 0$ ) имеет место обратная ситуация: положительный заряд столба атмосферы и отрицательный заряд на поверхности Земли. Мы уже отмечали, что если собрать воедино все области хорошей погоды, то суммарный заряд на поверхности Земли в них составит порядка  $-5 \cdot 10^5$  Кл. Однако теперь мы понимаем, что в то же время и суммарный заряд на поверхности Земли в области источников, и суммарный заряд всего столба атмосферы в области хорошей погоды составят порядка тех же  $5 \cdot 10^5$  Кл (но с другим знаком). Суммарный же заряд столба атмосферы в области источников должен компенсировать заряд на поверхности Земли в этом столбе и составлять порядка  $-5 \cdot 10^5$  Кл. Разумеется, эти оценки не вполне точны из-за неточности столбцового приближения, но они проясняют качественную картину распределения зарядов в ГЭЦ.

## § 10. Параметризация ионосферного потенциала в моделях климата и прогноза погоды

Мы уже обсуждали, как можно моделировать ГЭЦ, если мы знаем распределение источников. Обсудим теперь вопрос о том, откуда взять это распределение. Мы покажем, как можно оценить распределение сторонних токов и рассчитать ионосферный потенциал по данным из моделей динамики атмосферы (моделей климата и прогноза погоды).

В каждой модели динамики атмосферы у нас есть какая-то сетка на поверхности Земли. Для вычисления вкладов ячеек этой сетки в ионосферный потенциал мы воспользуемся формулой (20). Предполагая простейший экспоненциальный профиль проводимости (4) во всей атмосфере, считая, что все сторонние токи  $J_{0i}$  равны одной и той же величине  $J_0$  (некому характерному значению) и разбивая каждую ячейку модельной сетки на два столбца, один из которых объединяет источники, а другой — всё остальное, мы можем переписать формулу (20) в виде

$$V = \sum_i \frac{\alpha_i S_i J_0}{S_0} \int_{z_i^-}^{z_i^+} \frac{dz}{\sigma(z)} = \sum_i \frac{J_0 D \alpha_i S_i}{\sigma_0 S_0} \left( \exp\left(-\frac{z_i^-}{D}\right) - \exp\left(-\frac{z_i^+}{D}\right) \right), \quad (24)$$

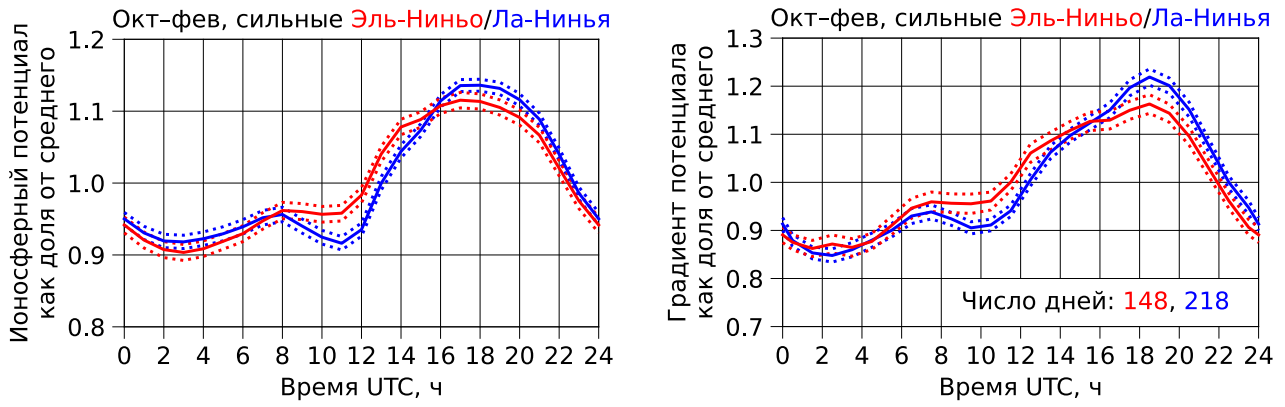
где  $S_0$  — полная площадь поверхности Земли, сумма берётся по всем ячейкам модельной сетки и для  $i$ -ой ячейки  $S_i$  обозначает полную площадь поверхности, а  $\alpha_i$  — её долю, занятую электрически активными облаками ( $z_i^-$  и  $z_i^+$ , как и ранее, обозначают нижнюю и верхнюю границы области смешанной фазы в облаке, где происходит разделение зарядов).

Мы приближённо отождествляем электрически активные облака с областями глубокой конвекции и вычлняем соответствующие ячейки модельной сетки с помощью критерия, основанного на рассчитанной доступной конвективной потенциальной энергии (convective available potential energy, CAPE): если среднее значение  $\varepsilon_i$  максимальной (по высоте точки расчёта) CAPE в  $i$ -ой ячейке не превышает пороговое значение  $\varepsilon_0 = 1$  кДж/кг, то мы предполагаем, что  $\alpha_i = 0$  (то есть такие столбцы не дают вклада в (24)). Для остальных ячеек мы следуем идее, предложенной в работе [Mareev and Volodin \[2014\]](#), и предполагаем, что занятая источниками доля площади  $\alpha_i$  пропорциональна отношению конвективных осадков  $P_i$  за некоторый период времени (порядка 1–2 часов) к полному количеству запасённой влаги в столбе воздуха  $W_i$ , то есть  $\alpha_i = kP_i/W_i$  с некоторым коэффициентом  $k$ .

Здесь необходимы некоторые пояснения. Прежде всего, отметим, что конвективные осадки — это часть рассчитываемых в моделях осадков, связанная с конвекцией; они наиболее интенсивны в тропиках, где как раз и сосредоточены основные источники ГЭЦ постоянного тока. Другая часть — неконвективные осадки — не связана с облаками глубокой конвекции и не играет такой же роли для ГЭЦ (можно сказать, что два типа осадков соответствуют баротропной и бароклинной неустойчивости в атмосфере).

В качестве мотивации оценки  $\alpha_i = kP_i/W_i$  можно привести следующее рассуждение. Рассмотрим небольшой объём воздуха, поднимаемый вверх конвекцией (там, где находится облако). Мы предполагаем, что за время подъёма этого объёма воздуха вся запасённая влага в этом месте выпадет в осадки; в той же области, где конвекции и облаков нет, в осадки ничего не выпадает. Это позволяет оценить долю площади, занятую в ячейке модельной сетки конвекцией и облаками, как отношение количества осадков, выпадающих за характерное время подъёма воздуха наверх, к полному количеству запасённой влаги в столбе над этой ячейкой. В реальности временные интервалы, которые мы используем для расчёта  $P_i$ , несколько больше типичных времён подъёма воздуха, однако мы можем предположить наличие некоторой пропорциональности между ними и считать, что доля площади, занятая конвекцией, пропорциональна  $P_i/W_i$  с некоторым коэффициентом пропорциональности  $k$ . Разумеется, это рассуждение довольно грубое и несколько спекулятивное, но на практике оказывается, что оно даёт параметризацию, которая работает лучше всех остальных предложенных на настоящий момент.

Подставляя наше выражение для  $\alpha_i$  в (24), мы приходим к следующей параметриза-



**Рис. 13.** Суточная вариация рассчитанного в модели WRF ионосферного потенциала (слева) и измеренного на станции Восток в Антарктиде градиента потенциала (справа) в период с октября по февраль в годы сильных Эль-Ниньо и Ла-Нинья (2006–2016). Линии из точек показывают отклонения в одну стандартную ошибку, числа в случае измерений показывают число дней хорошей погоды. Рисунок из статьи [Slyunyaev et al. \[2021\]](#).

ции ионосферного потенциала:

$$V = \sum_i \frac{J_0 k D S_i}{\sigma_0 S_0} \frac{P_i}{W_i} \left( \exp\left(-\frac{z_i^-}{D}\right) - \exp\left(-\frac{z_i^+}{D}\right) \right) \times \begin{cases} 0, & \varepsilon_i < \varepsilon_0, \\ 1, & \varepsilon_i \geq \varepsilon_0, \end{cases}$$

или, отбрасывая не интересующие нас постоянные коэффициенты,

$$V \propto \sum_i \frac{S_i P_i}{W_i} \left( \exp\left(-\frac{z_i^-}{D}\right) - \exp\left(-\frac{z_i^+}{D}\right) \right) \times \begin{cases} 0, & \varepsilon_i < \varepsilon_0, \\ 1, & \varepsilon_i \geq \varepsilon_0. \end{cases} \quad (25)$$

При вычислениях границы  $z_i^-$  и  $z_i^+$  области смешанной фазы можно отождествить с высотами изотерм  $0^\circ\text{C}$  и около  $-40^\circ\text{C}$  соответственно. Для вычисления региональных вкладов в ионосферный потенциал достаточно ограничить суммирование в формуле (25) на ячейки сетки, соответствующие нужному региону.

Приведём в заключение одну иллюстрацию. На [рис. 13](#) слева показан пример расчёта суточной вариации ГЭЦ постоянного тока с помощью описанной выше параметризации в модели прогноза погоды WRF (Weather Research and Forecasting model). Расчёт был проведён для периодов с октября по февраль отдельно в годы сильных событий Эль-Ниньо и в годы сильных событий Ла-Нинья (на протяжении 2006–2016 годов). Эль-Ниньо и Ла-Нинья — это две противоположные фазы климатической моды Эль-Ниньо — Южное колебание, которая существенным образом возмущает конвекцию в тропиках и через это опосредованно влияет и на ГЭЦ постоянного тока. Для сравнения справа на том же рисунке показаны результаты измерений приземного электрического поля на станции Восток в Антарктиде за тот же период времени. Сравнивая два рисунка, мы видим, что модель, во-первых, неплохо воспроизводит форму классической кривой Карнеги, хотя и недооценивает амплитуду вариации. Во-вторых, мы видим, что относительный эффект — искажение формы кривой Карнеги во время событий Эль-Ниньо и Ла-Нинья в определённые часы — моделирование передаёт достаточно хорошо (более того, конкретно в данном случае эффект был сначала обнаружен в моделировании и лишь затем найден в данных наблюдений). Однако преимущество моделирования заключается в том, что можно не только заметить эффект, но и детально объяснить его, рассмотрев изменения вкладов различных регионов в ионосферный потенциал во время событий Эль-Ниньо и Ла-Нинья и связав их с изменениями паттернов конвекции [см. подробнее [Slyunyaev et al., 2021](#)]. Приведённый пример, помимо прочего, показывает, что ГЭЦ постоянного

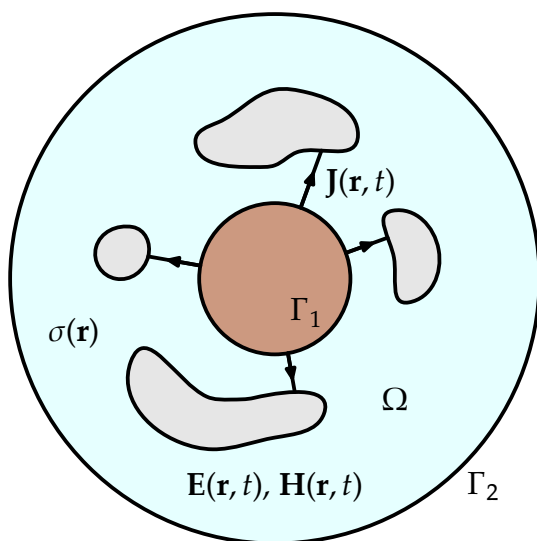
тока тесно связана с состоянием климатической системы Земли и является важной частью земной системы.

## Часть 2. Глобальная электрическая цепь переменного тока

### §1. Уравнения для электрического и магнитного полей

Перейдём теперь к обсуждению ГЭЦ переменного тока. Напомним, что под ГЭЦ переменного тока понимаются шумановские резонансы — низкочастотные колебания, возбуждаемые в резонаторе Земля — ионосфера всей совокупностью молниевых разрядов [Блиох и др., 1977; Sentman, 1995; Surkov and Hayakawa, 2014, гл. 4; Nickolaenko and Hayakawa, 2014; Price, 2016]. Сам тот факт, что пространство между поверхностью Земли и ионосферой образует резонатор, обеспечивается их высокой проводимостью. Существование соответствующих резонансов было сначала предсказано Шуманом теоретически [Schumann, 1952], и лишь позже они были обнаружены экспериментально [Balsler and Wagner, 1960]. Здесь мы в основном сфокусируемся на теоретической задаче о шумановских резонансах. В литературе можно встретить различные подходы к этой задаче; мы попробуем описать простейшую модель резонансов, допускающую учёт проводимости.

Уравнения ГЭЦ переменного тока получаются из нестационарных уравнений Максвелла. Мы снова рассматриваем атмосферу как область  $\Omega$ , граница которой состоит из двух частей — поверхности Земли  $\Gamma_1$  и охватывающей её внешней границы  $\Gamma_2$  (см. рис. 14). Как и в случае ГЭЦ постоянного тока, в роли источника здесь будет выступать плотность стороннего тока  $\mathbf{J}$ , однако теперь это будет не ток зарядки в электрически активных облаках, а ток переноса заряда в молниевых разрядах. В этом случае из уравнений Максвелла с учётом обобщённого закона Ома (5) можно выделить пару уравнений для напряжённости электрического поля  $\mathbf{E}$  и напряжённости магнитного поля  $\mathbf{H}$ :



**Рис. 14.** Геометрия задачи о ГЭЦ переменного тока. Стрелками схематически показано распределение плотности тока источников  $\mathbf{J}$ , отличной от нуля только в молниевых разрядах.

где  $\sigma$  — проводимость (которую мы предполагаем постоянной во времени),  $c$  — скорость света,  $t$  — время. Предполагается, что пространственно-временное распределение стороннего тока  $\mathbf{J}$  соответствует пространственно-временному распределению молниевых разрядов (см. рис. 14). Другая пара уравнений Максвелла нам не потребуется.

Как и в случае ГЭЦ постоянного тока, в качестве граничных условий мы можем положить равенство нулю тангенциальной компоненты электрического поля на всей границе:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_1} = 0, \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = 0, \quad (28)$$

где  $\mathbf{n}$  обозначает внешнюю нормаль к границе области  $\Omega$ .



Для дальнейшего анализа мы применим к уравнениям преобразование Фурье по времени. Введём комплексные амплитуды частотного спектра  $\mathbf{E}^\omega$ ,  $\mathbf{H}^\omega$  и  $\mathbf{J}^\omega$ , связанные с  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{J}$  формулами

$$\mathbf{E}^\omega(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t} dt, \quad \mathbf{H}^\omega(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t} dt, \quad \mathbf{J}^\omega(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t} dt,$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}^\omega(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}^\omega(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{J}^\omega(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega$$

(здесь и в дальнейшем  $\mathbf{r}$  — вектор пространственных координат). На практике нас будут главным образом интересовать именно спектры, а не сами исходные поля.

Применяя описанное выше преобразование Фурье к уравнениям (26) и (27), мы получаем следующие уравнения для комплексных спектральных амплитуд:

$$\text{rot } \mathbf{H}^\omega = \frac{i\omega}{c} \varepsilon \mathbf{E}^\omega + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}^\omega, \quad (29)$$

$$\text{rot } \mathbf{E}^\omega = -\frac{i\omega}{c} \mathbf{H}^\omega, \quad (30)$$

где для краткости мы ввели комплексную диэлектрическую проницаемость

$$\varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = 1 + \frac{4\pi\sigma(\mathbf{r})}{i\omega}. \quad (31)$$

Преобразованные граничные условия (28) выглядят так же:

$$\mathbf{E}^\omega \times \mathbf{n}|_{\Gamma_1} = 0, \quad \mathbf{E}^\omega \times \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = 0 \quad (32)$$

(здесь и далее под скалярными и векторными произведениями комплекснозначных векторов мы понимаем произведения, унаследованные с обычных скалярных и векторных произведений в трёхмерном пространстве; если  $\mathbf{A} = \mathbf{a}_1 + i\mathbf{a}_2$  и  $\mathbf{B} = \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2$ , где  $\mathbf{a}_{1,2}$  и  $\mathbf{b}_{1,2}$  — обычные векторы в действительном трёхмерном пространстве, то, например,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 + i\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 + i\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2$ ).

## §2. О единственности решения задачи

Прежде чем переходить непосредственно к решению системы уравнений (29), (30), (32), выясним, при каких условиях эта задача будет иметь единственное решение.

Пусть при фиксированном значении частоты  $\omega$  комбинации полей  $(\mathbf{E}_1^\omega, \mathbf{H}_1^\omega)$  и  $(\mathbf{E}_2^\omega, \mathbf{H}_2^\omega)$  — два решения задачи (29), (30), (32) с одним и тем же источником  $\mathbf{J}^\omega$  и одной и той же проводимостью  $\sigma$ . Вычитая из уравнений (29), (30) и (32) для  $\mathbf{E}_1^\omega$  и  $\mathbf{H}_1^\omega$  аналогичные уравнения для  $\mathbf{E}_2^\omega$  и  $\mathbf{H}_2^\omega$ , мы получим для разностных полей  $\delta\mathbf{E}^\omega = \mathbf{E}_1^\omega - \mathbf{E}_2^\omega$  и  $\delta\mathbf{H}^\omega = \mathbf{H}_1^\omega - \mathbf{H}_2^\omega$  задачу с нулевым источником:

$$\text{rot } \delta\mathbf{E}^\omega = -\frac{i\omega}{c} \delta\mathbf{H}^\omega,$$

$$\text{rot } \delta\mathbf{H}^\omega = \frac{i\omega}{c} \varepsilon \delta\mathbf{E}^\omega,$$

$$\delta\mathbf{E}^\omega \times \mathbf{n}|_{\Gamma_1} = 0, \quad \delta\mathbf{E}^\omega \times \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = 0.$$

Применяя известное тождество векторного анализа к  $\delta\mathbf{E}^\omega$  и  $\overline{\delta\mathbf{H}^\omega}$  (здесь и далее чертой мы обозначаем комплексное сопряжение), мы можем написать:

$$\text{div}(\delta\mathbf{E}^\omega \times \overline{\delta\mathbf{H}^\omega}) = \overline{\delta\mathbf{H}^\omega} \cdot \text{rot } \delta\mathbf{E}^\omega - \delta\mathbf{E}^\omega \cdot \text{rot } \overline{\delta\mathbf{H}^\omega}.$$

Подставляя сюда выражения для  $\text{rot } \delta \mathbf{E}^\omega$  и  $\text{rot } \overline{\delta \mathbf{H}^\omega}$  из приведённых выше уравнений, мы получаем:

$$\text{div}(\delta \mathbf{E}^\omega \times \overline{\delta \mathbf{H}^\omega}) = -\frac{i\omega}{c} |\delta \mathbf{H}^\omega|^2 + \frac{i\omega}{c} \bar{\varepsilon} |\delta \mathbf{E}^\omega|^2$$

(здесь и далее мы используем обозначение  $|\mathbf{A}|$  для квадратного корня из  $\overline{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}$ ; если  $\mathbf{A} = \mathbf{a}_1 + i\mathbf{a}_2$  с действительными  $\mathbf{a}_{1,2}$ , то, как легко видеть,  $|\mathbf{A}|^2 = |\mathbf{a}_1|^2 + |\mathbf{a}_2|^2$ , то есть эта величина всегда действительна и неотрицательна).

Проинтегрируем теперь полученное равенство по области  $\Omega$  и сразу перейдём в левой части к интегралу по границе, а в правую подставим выражение (31) для  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_1} (\delta \mathbf{E}^\omega \times \overline{\delta \mathbf{H}^\omega}) \cdot \mathbf{n} ds + \oint_{\Gamma_2} (\delta \mathbf{E}^\omega \times \overline{\delta \mathbf{H}^\omega}) \cdot \mathbf{n} ds = \\ = -\frac{i\omega}{c} \int_{\Omega} |\delta \mathbf{H}^\omega|^2 d\mathbf{r} + \frac{i\omega}{c} \int_{\Omega} |\delta \mathbf{E}^\omega|^2 d\mathbf{r} - \frac{4\pi}{c} \int_{\Omega} \sigma |\delta \mathbf{E}^\omega|^2 d\mathbf{r} \end{aligned}$$

(напомним, что  $\mathbf{n}$  обозначает внешнюю по отношению к области  $\Omega$  нормаль как в случае поверхности  $\Gamma_1$ , так и в случае поверхности  $\Gamma_2$ ). В силу граничных условий (32) оба подинтегральных выражения в левой части равенства тождественно равны нулю; отсюда вытекает тождество

$$\int_{\Omega} |\delta \mathbf{E}^\omega|^2 dV - \int_{\Omega} |\delta \mathbf{H}^\omega|^2 dV = \frac{4\pi}{i\omega} \int_{\Omega} \sigma |\delta \mathbf{E}^\omega|^2 dV.$$

Взяв отдельно действительную и мнимую часть от этого соотношения, мы получим пару равенств

$$\int_{\Omega} |\delta \mathbf{E}^\omega|^2 dV = \int_{\Omega} |\delta \mathbf{H}^\omega|^2 dV, \quad \int_{\Omega} \sigma |\delta \mathbf{E}^\omega|^2 dV = 0. \quad (33)$$

В дальнейшем нас будут интересовать два случая. Во-первых, мы будем рассматривать задачу с некоторым распределением проводимости  $\sigma$  в атмосфере, считая при этом, что проводимость не обращается в нуль ни в одной точке. Такое предположение соответствует реальной физической задаче о резонансах в полости Земля — ионосфера. Во-вторых, мы будем рассматривать идеализированную задачу с непроводящей атмосферой, в которой  $\sigma \equiv 0$ . Эта задача интересна нам с точки зрения классических результатов о шумановских резонансах, получаемых в этом приближении.

В случае задачи с проводящей средой и  $\sigma \neq 0$  второе из равенств (33) позволяет заключить, что  $\delta \mathbf{E}^\omega \equiv 0$ , а тогда из первого равенства немедленно следует, что и  $\delta \mathbf{H}^\omega \equiv 0$ . Иными словами, в этом случае мы получаем, что  $\mathbf{E}_1^\omega \equiv \mathbf{E}_2^\omega$  и  $\mathbf{H}_1^\omega \equiv \mathbf{H}_2^\omega$ , то есть задача (29), (30), (32) допускает не более одного решения.

В случае же непроводящей среды, когда  $\sigma \equiv 0$ , второе равенство в (33) и так тождественно выполняется, и мы имеем лишь равенство интегралов от  $|\delta \mathbf{E}^\omega|^2$  и  $|\delta \mathbf{H}^\omega|^2$ . В этой задаче единственность решения в общем случае гарантировать нельзя. Сама задача в отсутствие проводимости сводится к обычной задаче о резонаторе из классической электродинамики; как известно, на некоторых частотах в такой задаче действительно возможны собственные колебания резонатора без источников. Известно, что в такой задаче можно выбрать ортогональный (в некотором смысле) набор собственных мод, а соленоидальную часть полей можно искать в виде разложения по этим модам; потенциальная же часть полей не имеет резонансной природы [см., например, Вайнштейн, 1988, гл. 15, 16].

### §3. Качественный анализ задачи

Перейдём теперь к решению задачи (29), (30), (32). Мы снова будем считать, что область  $\Omega$  сферически симметрична и в привязанных к центру Земли сферических координатах  $(r, \vartheta, \varphi)$  описывается как

$$\Omega = \{(r, \vartheta, \varphi): R_0 < r < R_1\},$$

а две компоненты границы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  являются концентрическими сферами  $r = R_0$  и  $r = R_1$  (см. рис. 14). Ранее при рассмотрении ГЭЦ постоянного тока мы обозначали азимутальный угол буквой  $\psi$ , дабы избежать путаницы с потенциалом, но в контексте ГЭЦ переменного тока такой проблемы нет, так что мы будем использовать более традиционное обозначение для сферических координат.

Сначала обсудим задачу на качественном уровне. Если пренебречь проводимостью ( $\sigma \equiv 0$ ) и рассмотреть задачу без источников ( $\mathbf{J}^w \equiv 0$ ), то уравнения (29), (30) будут описывать электромагнитные волны, а собственные моды резонатора будут чем-то вроде стоячих волн. Не решая пока ничего математически строго, постараемся оценить диапазон частот, в котором мы можем ожидать найти резонансы в рассматриваемой нами геометрии [ср. Блиох и др., 1977, гл. 1, §2, с. 7].

Предположим сначала, что электромагнитная волна на частоте  $\omega$  (то есть с длиной волны  $2\pi c/\omega$ ) распространяется вдоль поверхности Земли и некоторым образом оббегает Землю по кругу (мы не задумываемся пока над тем, в какой степени в действительности возможно такое решение). Резонансы будут соответствовать ситуации, когда волна повторяет саму себя после полного обхода планеты; это означает, что длина окружности Земли  $2\pi R_0$  должна равняться целому числу  $l$  длин волн, то есть должно выполняться  $2\pi R_0 = 2\pi c/\omega \cdot l$ . Из этого условия мы получаем оценку для резонансных частот:

$$\omega = \frac{cl}{R_0}.$$

Разумеется, такое рассмотрение является нестрогим и качественным: в реальности в сферической геометрии мы не можем сформировать описанную конструкцию из бегущей «по кругу» периодической волны. Точное решение уравнений в сферических координатах приводит к классической формуле Шумана [Schumann, 1952]

$$\omega \approx \frac{c\sqrt{l(l+1)}}{R_0}. \quad (34)$$

Мы выведем эту формулу позже; сейчас же нам важно лишь то, что частоты таких поперечных (по отношению к радиальному направлению) резонансов подчиняются условию  $\omega \sim c/R_0$ .

Если мы теперь «запустим» волну не вдоль поверхности Земли, а в радиальном направлении, то с учётом граничных условий (32) резонансной структуре будет отвечать ситуация, когда между граничными поверхностями укладывается целое число  $n$  полуволн:  $R_1 - R_0 = \pi c/\omega \cdot n$ , то есть

$$\omega = \frac{c\pi n}{R_1 - R_0}.$$

Таким образом, для резонансных структур в радиальном направлении частота будет иметь порядок  $\omega \sim c\pi/(R_1 - R_0)$ . Поскольку  $R_1 - R_0 \ll R_0$ , такие резонансы будут иметь намного более высокую частоту, нежели поперечные резонансы, для которых, как мы видели выше,  $\omega \sim c/R_0$ .

Приведённые выше соображения подсказывают нам, что основные резонансы в рассматриваемой нами ситуации связаны с чисто поперечными геометрическими структурами колебаний и частотным диапазоном  $\omega \sim c/R_0$  (в случае комбинации радиальных и поперечных структур частота будет определяться главным образом радиальной составляющей и иметь более высокий порядок). Поэтому далее мы будем фокусироваться именно на частотном диапазоне, в котором  $\omega \sim c/R_0$ , — это единицы и десятки Гц в пересчёте на линейную частоту  $f = \omega/2\pi$ .

#### § 4. Упрощающие предположения

С этого момента мы будем предполагать, что проводимость  $\sigma$  зависит только от радиальной координаты  $r$ . Как мы увидим, в этом случае задачу можно проанализировать достаточно детально, введя некоторую потенциальную функцию и решая уравнение для неё методом разделения переменных. В случае же зависимости  $\sigma(\mathbf{r})$  более общего вида решение задачи возможно только путём численного моделирования общей системы уравнений — например, с помощью метода конечных разностей во временной области. Сразу отметим, что предположение о проводимости вида  $\sigma(r)$  означает, что и определяемая формулой (31) комплексная диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  также является функцией только  $r$  и  $\omega$ .

Предположения о том, что проводимость имеет вид  $\sigma(r)$ , а комплексная диэлектрическая проницаемость —  $\varepsilon(r, \omega)$ , уже достаточно, чтобы свести задачу к уравнениям для некоторых потенциальных функций. Однако в самом общем случае рассуждения будут достаточно длинными и технически сложными. Чтобы упростить задачу, заметим, что сторонний ток, поддерживающий шумановские резонансы в резонаторе Земля — ионосфера, определяется вертикальным переносом заряда в молниевых разрядах облако — земля. Поэтому с практической точки зрения можно считать, что лишь радиальная компонента вектора  $\mathbf{J}^\omega$ , входящего в уравнение (29), отлична от нуля.

Оказывается, что чисто радиальный источник  $\mathbf{J}^\omega$  (с  $J_{\vartheta, \varphi}^\omega \equiv 0$ ) не может возбудить в резонаторе колебания с ненулевой радиальной компонентой магнитного поля  $H_r^\omega$ . Интуитивно этого можно было ожидать, глядя на уравнения (29) и (30), ибо ток обычно создаёт магнитное поле вокруг себя. Однако показать это строго математически достаточно сложно: в отсутствие проводимости даже вообще без источника уравнения формально допускают решения в виде собственных мод с  $H_r^\omega \neq 0$  (правда, на частотах за пределами шумановского диапазона). Чтобы избежать сложных математических рассуждений, мы поступим следующим образом: будем искать решение с  $H_r^\omega \equiv 0$ , а затем, найдя такое решение, сошлёмся на единственность решения задачи в случае проводящей среды (а в реальности среда проводящая). В случае же непроводящей среды, — когда единственности нет из-за существования собственных мод, — нас будут интересовать только те решения, которые получаются предельным переходом из соответствующей более реалистичной задачи с проводящей средой и чисто радиальным током источников, поэтому поиск решения в предположении  $H_r^\omega \equiv 0$  также выглядит оправданным.

#### § 5. Уравнение для потенциальной функции

Итак, мы будем искать решение задачи (29), (30), (32) с  $\sigma = \sigma(r)$  и  $J_{\vartheta, \varphi}^\omega \equiv 0$  в предположении, что  $H_r^\omega \equiv 0$ . Сначала мы перепишем уравнения в координатах  $(r, \vartheta, \varphi)$ .

Записывая компоненты ротора в сферических координатах, из уравнения (29) при

сделанных предположениях мы получаем три одномерных уравнения

$$\frac{1}{r \sin \vartheta} \left( \frac{\partial (H_\varphi^\omega \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial H_\vartheta^\omega}{\partial \varphi} \right) = \frac{i\omega \varepsilon(r, \omega)}{c} E_r^\omega + \frac{4\pi}{c} J_r^\omega, \quad (35)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial (rH_\varphi^\omega)}{\partial r} = \frac{i\omega \varepsilon(r, \omega)}{c} E_\vartheta^\omega, \quad (36)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rH_\vartheta^\omega)}{\partial r} = \frac{i\omega \varepsilon(r, \omega)}{c} E_\varphi^\omega. \quad (37)$$

а из уравнения (30) — ещё три уравнения

$$\frac{1}{r \sin \vartheta} \left( \frac{\partial (E_\varphi^\omega \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial E_\vartheta^\omega}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (38)$$

$$\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial E_r^\omega}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (rE_\varphi^\omega)}{\partial r} = -\frac{i\omega}{c} H_\vartheta^\omega, \quad (39)$$

$$\frac{1}{r} \left( \frac{\partial (rE_\vartheta^\omega)}{\partial r} - \frac{\partial E_r^\omega}{\partial \vartheta} \right) = -\frac{i\omega}{c} H_\varphi^\omega, \quad (40)$$

Граничные условия (32) в случае сферической геометрии сводятся к требованиям

$$E_{\vartheta, \varphi}^\omega \Big|_{r=R_0} = 0, \quad E_{\vartheta, \varphi}^\omega \Big|_{r=R_1} = 0. \quad (41)$$

Уравнение (38) нам будет удобно домножить на  $\varepsilon(r, \omega)r^2 \sin \vartheta$  и переписать в виде

$$\frac{\partial (\varepsilon(r, \omega)rE_\varphi^\omega \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} = \frac{\partial (\varepsilon(r, \omega)rE_\vartheta^\omega)}{\partial \varphi}.$$

Ясно, что это уравнение будет удовлетворено, если найдётся функция  $W(\mathbf{r}, \omega)$ , такая что

$$\varepsilon(r, \omega)rE_\vartheta^\omega = \frac{\partial W}{\partial \vartheta}, \quad \varepsilon(r, \omega)rE_\varphi^\omega \sin \vartheta = \frac{\partial W}{\partial \varphi}.$$

Проинтегрировав  $W$  по  $r$ , можно ввести ещё одну функцию  $U(\mathbf{r}, \omega)$ , удовлетворяющую соотношению

$$W = \frac{\partial U}{\partial r};$$

таким образом, мы хотим, чтобы выполнялось

$$E_\vartheta^\omega = \frac{1}{\varepsilon(r, \omega)r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \vartheta}, \quad E_\varphi^\omega = \frac{1}{\varepsilon(r, \omega)r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \varphi}. \quad (42)$$

Теперь перепишем уравнения (36) и (37) с учётом введённых обозначений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial (rH_\varphi^\omega)}{\partial r} &= -\frac{i\omega}{c} \varepsilon(r, \omega) E_\vartheta^\omega = -\frac{i\omega}{c} \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \vartheta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{i\omega}{cr} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (rH_\vartheta^\omega)}{\partial r} &= \frac{i\omega}{c} \varepsilon(r, \omega) E_\varphi^\omega = \frac{i\omega}{c} \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial W}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{i\omega}{cr \sin \vartheta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right). \end{aligned}$$

Ясно, что для удовлетворения этих соотношений достаточно выполнения равенств

$$H_\vartheta^\omega = \frac{i\omega}{cr \sin \vartheta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad H_\varphi^\omega = -\frac{i\omega}{cr} \frac{\partial U}{\partial \vartheta}. \quad (43)$$



Подставляя выражения (43) в уравнение (35), мы получаем:

$$-\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{i\omega}{c} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{i\omega \varepsilon(r, \omega)}{c} E_r^\omega + \frac{4\pi}{c} J_r^\omega,$$

или, что то же самое,

$$E_r^\omega = -\frac{1}{\varepsilon(r, \omega) r^2} \Delta_{\vartheta, \varphi} U - \frac{4\pi}{i\omega \varepsilon(r, \omega)} J_r^\omega, \quad (44)$$

где

$$\Delta_{\vartheta, \varphi} U = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \quad (45)$$

— угловая часть оператора Лапласа.

Оставшиеся уравнения (39) и (40) мы перепишем, подставив туда выражения (42) для  $E_\vartheta^\omega$  и  $E_\varphi^\omega$  и выражения (43) для  $H_\vartheta^\omega$  и  $H_\varphi^\omega$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r \sin \vartheta} E_r^\omega \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\varepsilon(r, \omega)} \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right) &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\omega^2}{c^2} U \right), \\ -\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{1}{r} E_r^\omega \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\varepsilon(r, \omega)} \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right) &= -\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{1}{r} \frac{\omega^2}{c^2} U \right). \end{aligned}$$

Ясно, что для справедливости этих соотношений достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$E_r^\omega = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\varepsilon(r, \omega)} \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} U. \quad (46)$$

Комбинируя (44) с (46), мы получаем уравнение для функции  $U$ :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\varepsilon(r, \omega)} \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{\varepsilon(r, \omega) r^2} \Delta_{\vartheta, \varphi} U + \frac{\omega^2}{c^2} U = -\frac{4\pi}{i\omega \varepsilon(r, \omega)} J_r^\omega. \quad (47)$$

Из написанного выше ясно, что если некоторая функция  $U$  является решением уравнения (47), то достаточно задать спектральные амплитуды компонент полей формулами (42)–(44), чтобы удовлетворить всем уравнениям системы (35)–(40). Для удовлетворения граничных условий (41) достаточно дополнить уравнение (47) граничными условиями

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=R_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=R_1} = 0. \quad (48)$$

Итак, если мы сможем найти решение задачи (47), (48), то мы получим решение задачи (38)–(41). Единственность решения исходной задачи (которая имеет место при наличии проводимости) в таком случае будет гарантировать, что в ходе всех сделанных упрощений и допущений мы ничего не потеряли и что в рассматриваемом нами случае задачу действительно можно описать одной потенциальной функцией  $U$ . Отметим также, что в литературе по шумановским резонансам можно встретить уравнения, подобные (47), с несколько по-другому введёнными потенциальными функциями.

## § 6. Разделение переменных в уравнении

Мы будем решать задачу (47), (48) с помощью разделения переменных. В сферических координатах оно приводит нас к сферическим функциям (или, иначе, сферическим

гармоникам) — собственным функциям оператора Лапласа на сфере. В литературе можно встретить различные нормировки сферических функций; здесь мы будем использовать сферические гармоники, определяемые выражением ( $l \geq 0, -l \leq m \leq l$ )

$$Y_l^m(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \exp(im\varphi) P_l^m(\cos \vartheta),$$

где  $P_l^m(\cos \vartheta)$  — присоединённые полиномы Лежандра, которые, в свою очередь, определяются формулой

$$P_l^m(\cos \vartheta) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} \sin^m \vartheta \frac{d^{l+m}}{d(\cos \vartheta)^{l+m}} (\cos^2 \vartheta - 1)^l.$$

Как известно, определённые так функции удовлетворяют соотношению [см., например, Никифоров и Уваров, 1984, § 10, формулы (2) и (10)]

$$\Delta_{\vartheta, \varphi} Y_l^m = -l(l+1) Y_l^m, \quad (49)$$

где  $\Delta_{\vartheta, \varphi}$  определяется формулой (45), и образуют полную ортонормированную систему функций на единичной сфере.

Попробуем теперь непосредственно применить разделение переменных к задаче (47), (48) для функции  $U$ . Прежде всего разложим по сферическим функциям правую часть уравнения (47):

$$J_r^\omega(r, \vartheta, \varphi, \omega) = \sum_{l,m} J_{lm}(r, \omega) Y_l^m(\vartheta, \varphi),$$

где коэффициенты  $J_{lm}(r, \omega)$  определяются обычным образом из условия ортонормированности сферических функций:

$$J_{lm}(r, \omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi J_r^\omega(r, \vartheta, \varphi, \omega) \overline{Y_l^m}(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (50)$$

Положив

$$U(r, \vartheta, \varphi, \omega) = \sum_{l,m} R_{lm}(r, \omega) Y_l^m(\vartheta, \varphi) \quad (51)$$

(с неизвестными пока коэффициентами  $R_{lm}(r, \omega)$ ) и подставив все разложения в (47) и (48), мы получим с учётом (49):

$$\begin{aligned} \sum_{l,m} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{\varepsilon(r, \omega)} \frac{dR_{lm}}{dr}(r, \omega) \right) Y_l^m(\vartheta, \varphi) - \sum_{l,m} \frac{l(l+1)}{\varepsilon(r, \omega) r^2} R_{lm}(r, \omega) Y_l^m(\vartheta, \varphi) + \\ + \sum_{l,m} \frac{\omega^2}{c^2} R_{lm}(r, \omega) Y_l^m(\vartheta, \varphi) = -\frac{4\pi}{i\omega \varepsilon(r, \omega)} \sum_{l,m} J_{lm}(r, \omega) Y_l^m(\vartheta, \varphi), \\ \sum_{l,m} \frac{dR_{lm}}{dr}(R_0, \omega) Y_l^m(\vartheta, \varphi) = 0, \quad \sum_{l,m} \frac{dR_{lm}}{dr}(R_1, \omega) Y_l^m(\vartheta, \varphi) = 0 \end{aligned}$$

(мы всюду пишем обычные, а не частные производные по  $r$ , поскольку  $\omega$  рассматриваем лишь как параметр, который не фигурирует явно в уравнениях). В силу ортонормированности сферических гармоник отсюда получается задача для радиальной функции  $R_{lm}(r, \omega)$ :

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{\varepsilon(r, \omega)} \frac{dR_{lm}}{dr} \right) + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{l(l+1)}{\varepsilon(r, \omega) r^2} \right) R_{lm} = -\frac{4\pi}{i\omega \varepsilon(r, \omega)} J_{lm}(r, \omega), \quad (52)$$

$$\left. \frac{dR_{lm}}{dr} \right|_{r=R_0} = 0, \quad \left. \frac{dR_{lm}}{dr} \right|_{r=R_1} = 0. \quad (53)$$

Решив эту задачу, мы сможем найти решение исходной задачи (47), (48) по формуле (51).

## § 7. Перенос источников в граничные условия

Пока что мы никак не конкретизировали вид распределения стороннего тока  $\mathbf{J}$  (и его Фурье-образа  $\mathbf{J}^\omega$ ) — за исключением предположения о том, что он является чисто радиальным. С целью упростить задачу ещё больше мы теперь примем во внимание тот факт, что токи молниевых разрядов в реальности сосредоточены в очень узких (в масштабах поверхности Земли) каналах. Пусть  $\vartheta_j$  и  $\varphi_j$  — координаты  $j$ -го разряда, а  $L_j$  — его вертикальный масштаб. Ток во всём канале молнии мы считаем одним и тем же в каждый момент времени  $t$  и равным по величине  $I_j(t)$  (эта величина, вообще говоря, может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от полярности разряда). Тогда мы можем смоделировать такой источник в виде произведения дельта-функций по поперечным координатам  $\vartheta$  и  $\varphi$  и ступенчатой функции вдоль радиальной координаты, отличной от нуля лишь в области  $R_0 < r < R_0 + L_j$ . Это даёт нам следующее распределение плотности стороннего тока:

$$J_r(r, \vartheta, \varphi, t) = \sum_j \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \delta(\vartheta - \vartheta_j) \delta(\varphi - \varphi_j) \times \begin{cases} I_j(t), & R_0 < r < R_0 + L_j, \\ 0, & R_0 + L_j < r < R_1, \end{cases} \quad (54)$$

где суммирование ведётся по всем рассматриваемым источникам.

Мы можем упростить задачу ещё больше и заменить протяжённые токовые диполи на точечные, пользуясь тем, что  $L_j \ll R_1 - R_0$ . А именно, в распределении тока, описываемом формулой (54), мы заменим протяжённый ток, текущий между  $r = R_0$  и  $r = R_0 + L_j$ , на точечный токовый диполь, расположенный в точке  $r = R_0 + L_j/2$ . Используя  $L_j$  в качестве характерного вертикального масштаба, мы получим вместо (54)

$$J_r(r, \vartheta, \varphi, t) = \sum_j \frac{I_j(t) L_j}{r^2 \sin \vartheta} \delta(r - R_0 - L_j/2) \delta(\vartheta - \vartheta_j) \delta(\varphi - \varphi_j).$$

Переходя к спектральной амплитуде, мы должны взять преобразование Фурье от  $J_r(\mathbf{r}, t)$ ; в результате имеем

$$J_r^\omega(r, \vartheta, \varphi, \omega) = \sum_j \frac{I_j^\omega(\omega) L_j}{r^2 \sin \vartheta} \delta(r - R_0 - L_j/2) \delta(\vartheta - \vartheta_j) \delta(\varphi - \varphi_j), \quad (55)$$

где  $I_j^\omega(\omega)$  — преобразование Фурье от  $I_j(t)$ . Подставляя (55) в выражение (50), мы получаем

$$J_{lm}(r, \omega) = \frac{1}{r^2} \sum_j I_j^\omega(\omega) L_j \delta(r - R_0 - L_j/2) \overline{Y_l^m}(\vartheta_j, \varphi_j). \quad (56)$$

Мы сможем ещё больше упростить задачу, если выберем некоторое характерное значение длины канала молнии  $L$  и положим  $L_j = L$  для всех  $j$ . В этом случае (56) станет возможно переписать в виде

$$J_{lm}(r, \omega) = \frac{L}{r^2} \delta(r - R_0 - L/2) \sum_j I_j^\omega(\omega) \overline{Y_l^m}(\vartheta_j, \varphi_j). \quad (57)$$

Это позволяет вместо задачи (52), (53) рассмотреть эквивалентную пару задач с нулевой правой частью — одну в области  $R_0 < r < R_0 + L/2$ , а другую в области  $R_0 + L/2 < r < R_1$  — то есть две задачи для однородного уравнения

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{\varepsilon(r, \omega)} \frac{dR_{lm}}{dr} \right) + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{l(l+1)}{\varepsilon(r, \omega) r^2} \right) R_{lm} = 0. \quad (58)$$

Соответственно, к граничным условиям (53) при  $r = R_0$  и  $r = R_1$  мы добавим условие непрерывности при  $r = R_0 + L/2$  и условие на скачок производной при  $r = R_0 + L/2$ , получаемое интегрированием (52) по  $r$  в малой окрестности этой точки с учётом (57). В результате будем иметь следующий набор условий:

$$\left. \frac{dR_{lm}}{dr} \right|_{r=R_0} = 0, \quad \left. \frac{dR_{lm}}{dr} \right|_{r=R_1} = 0, \quad (59)$$

$$R_{lm}|_{r=R_0+L/2-0} = R_{lm}|_{r=R_0+L/2+0}, \quad (60)$$

$$\left. \frac{dR_{lm}}{dr} \right|_{r=R_0+L/2+0} - \left. \frac{dR_{lm}}{dr} \right|_{r=R_0+L/2-0} = -\frac{4\pi L}{i\omega(R_0+L/2)^2} \sum_j I_j^\omega(\omega) \overline{Y_l^m}(\vartheta_j, \varphi_j). \quad (61)$$

Ясно, что задача (58)–(61) эквивалентна задаче (52), (53) с источником (57).

Мы можем ещё несколько упростить полученную задачу и получить более компактную систему уравнений вместо (58)–(61). Пользуясь тем, что  $L \ll R_1 - R_0$ , мы можем исключить из рассмотрения область  $R_0 < r < R_0 + L/2$ , лежащую ниже дипольных источников (очень малую по сравнению с другой областью  $R_0 + L/2 < r < R_1$ ), считая приближённо, что  $dR_{lm}/dr$  в этой приземной области не успевает сильно измениться между  $r = R_0$  и  $r = R_0 + L/2$ . Поэтому в условие (61) мы подставляем значение  $dR_{lm}/dr|_{r=R_0+L/2-0} = 0$  в согласии с первым из граничных условий (59); условие же (60) становится теперь излишним. В результате для уравнения (58) в области  $R_0 + L/2 < r < R_1$  у нас остаются второе граничное условие из (59) и условие

$$\left. \frac{dR_{lm}}{dr} \right|_{r=R_0+L/2+0} = -\frac{4\pi L}{i\omega(R_0+L/2)^2} \sum_j I_j^\omega(\omega) \overline{Y_l^m}(\vartheta_j, \varphi_j).$$

Снова пользуясь тем, что  $L \ll R_1 - R_0$ , мы приближённо заменим область на область  $R_0 < r < R_1$  и придём к задаче

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{\varepsilon(r, \omega)} \frac{dR_{lm}}{dr} \right) + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{l(l+1)}{\varepsilon(r, \omega)r^2} \right) R_{lm} = 0, \quad (62)$$

$$\left. \frac{dR_{lm}}{dr} \right|_{r=R_0} = -\frac{4\pi L}{i\omega R_0^2} \sum_j I_j^\omega(\omega) \overline{Y_l^m}(\vartheta_j, \varphi_j), \quad \left. \frac{dR_{lm}}{dr} \right|_{r=R_1} = 0. \quad (63)$$

Тем самым мы «перенесли» источник в граничные условия задачи для радиальных функций  $R_{lm}(r)$ .

## § 8. Задача в отсутствие проводимости

Перейдём к решению задачи (62), (63). Сначала мы рассмотрим задачу без учёта проводимости — в случае, когда  $\sigma \equiv 0$  и  $\varepsilon \equiv 1$ . Уравнения (62) и (63) в отсутствие проводимости принимают вид

$$\frac{d^2 R_{lm}}{dr^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R_{lm} = 0, \quad (64)$$

$$\left. \frac{dR_{lm}}{dr} \right|_{r=R_0} = -\frac{4\pi L}{i\omega R_0^2} \sum_j I_j^\omega(\omega) \overline{Y_l^m}(\vartheta_j, \varphi_j), \quad \left. \frac{dR_{lm}}{dr} \right|_{r=R_1} = 0 \quad (65)$$

Уравнение (64) — однородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение; в соответствии с общей теорией, его общее решение может быть выражено в виде

линейной комбинации некоторой фундаментальной системы решений [см., например, [Степанов, 1959](#), гл. 5, § 2]. Простейшая фундаментальная система решений для уравнения (64) выражается через функции Риккати–Бесселя  $S_l(x)$  и  $C_l(x)$  — решения уравнения

$$x^2 \frac{d^2 F}{dx^2} + (x^2 - l(l+1))F = 0, \quad (66)$$

связанные со сферическими функциями Бесселя  $j_l(x)$  и  $y_l(x)$  и с обычными функциями Бесселя  $J_s(x)$  и  $Y_s(x)$  соотношениями

$$S_l(x) = x j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{l+1/2}(x), \quad C_l(x) = -x y_l(x) = -\sqrt{\frac{\pi x}{2}} Y_{l+1/2}(x). \quad (67)$$

Не составляет большого труда сделать замену переменной, определяемую формулами (67), и свести уравнение (66) к более известным уравнениям для сферических или обыкновенных функций Бесселя. Полезно также отметить, что функции Риккати–Бесселя могут быть выражены и через элементарные функции:

$$S_l(x) = (-1)^l x^{l+1} \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin x}{x}, \quad C_l(x) = (-1)^l x^{l+1} \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\cos x}{x};$$

эти выражения вытекают из известных представлений для сферических функций Бесселя, называемых иногда формулами Рэля [см., например, [Bateman Manuscript Project, 1953](#), разд. 7.2.6 и формулы (7), (8) в разд. 7.11; [Никифоров и Уваров, 1984](#), § 17, формулы (3) и (4)].

Сравнивая уравнение (66) с уравнением (64), мы заключаем, что фундаментальную систему решений для последнего будут образовывать функции  $S_l(\omega r/c)$  и  $C_l(\omega r/c)$ . Поэтому решение уравнения (64) мы будем искать в виде

$$R_{lm}(r, \omega) = u_{lm}(\omega) S_l\left(\frac{\omega r}{c}\right) + v_{lm}(\omega) C_l\left(\frac{\omega r}{c}\right),$$

где  $u_{lm}(\omega)$  и  $v_{lm}(\omega)$  — коэффициенты. Подставляя это разложение в граничные условия (65), мы получаем систему уравнений для  $u_{lm}$  и  $v_{lm}$ :

$$u_{lm}(\omega) \frac{dS_l}{dx} \left( \frac{\omega R_0}{c} \right) + v_{lm}(\omega) \frac{dC_l}{dx} \left( \frac{\omega R_0}{c} \right) = -\frac{4\pi c L}{i\omega^2 R_0^2} \sum_j I_j^\omega(\omega) \overline{Y_l^m}(\vartheta_j, \varphi_j), \quad (68)$$

$$u_{lm}(\omega) \frac{dS_l}{dx} \left( \frac{\omega R_1}{c} \right) + v_{lm}(\omega) \frac{dC_l}{dx} \left( \frac{\omega R_1}{c} \right) = 0. \quad (69)$$

Мы уже отмечали, что в отсутствие проводимости могут существовать собственные моды резонатора — решения задачи без источника. Поэтому одновременно с задачей (64), (65) мы рассмотрим её частный случай — задачу на собственные моды

$$\frac{d^2 R_l}{dr^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R_l = 0, \quad (70)$$

$$\left. \frac{dR_l}{dr} \right|_{r=R_0} = 0, \quad \left. \frac{dR_l}{dr} \right|_{r=R_1} = 0; \quad (71)$$

поиск её решения в виде

$$R_l(r, \omega) = u_l(\omega) S_l\left(\frac{\omega r}{c}\right) + v_l(\omega) C_l\left(\frac{\omega r}{c}\right),$$



приводит к системе уравнений

$$u_l(\omega) \frac{dS_l}{dx} \left( \frac{\omega R_0}{c} \right) + v_l(\omega) \frac{dC_l}{dx} \left( \frac{\omega R_0}{c} \right) = 0, \quad (72)$$

$$u_l(\omega) \frac{dS_l}{dx} \left( \frac{\omega R_1}{c} \right) + v_l(\omega) \frac{dC_l}{dx} \left( \frac{\omega R_1}{c} \right) = 0; \quad (73)$$

второй нижний индекс у  $R_l$ ,  $u_l$  и  $v_l$  мы не пишем, ибо от  $m$  в этой задаче ничего не зависит. Если на частоте  $\omega$  определитель

$$\Delta_l(\omega) = \begin{vmatrix} \frac{dS_l}{dx} \left( \frac{\omega R_0}{c} \right) & \frac{dC_l}{dx} \left( \frac{\omega R_0}{c} \right) \\ \frac{dS_l}{dx} \left( \frac{\omega R_1}{c} \right) & \frac{dC_l}{dx} \left( \frac{\omega R_1}{c} \right) \end{vmatrix}$$

не обращается в нуль, то система уравнений (68), (69) будет иметь единственное решение, а система уравнений (72), (73) будет иметь лишь нулевое решение. Это означает, что на данной частоте задача с источником (64), (65) будет иметь единственное решение, а собственных мод на этой частоте не будет.

Если же  $\Delta_l(\omega) = 0$ , то система уравнений (72), (73) будет иметь ненулевое решение, то есть на частоте  $\omega$  будут существовать собственные моды — колебания, соответствующие нетривиальному решению задачи (70), (71). Поскольку коэффициенты при  $u_{lm}$  и  $v_{lm}$  в уравнении (69) не могут одновременно обращаться в нуль в силу независимости решений  $S_l(x)$  и  $C_l(x)$ , то при выполнении условия  $\Delta_l(\omega) = 0$  уравнение (68) обязано быть пропорциональным уравнению (69). Это означает, что система (68), (69), а также задача с источником (64), (65) формально будут разрешимыми лишь при нулевой правой части в уравнении (68) и в первом из условий (65); решение в случае разрешимости будет собственным колебанием на этой частоте.

Приведённое выше наблюдение о связи разрешимости задач (64), (65) и (70), (71) является, по существу, частным случаем общей альтернативы Фредгольма, известной в разных разделах математики.

## §9. Формула Шумана для частот резонансов

Найдём теперь частоты собственных мод в задаче без проводимости; в соответствии со сказанным выше, для этого нам нужно будет проанализировать, при каких значениях  $\omega$  будет выполняться  $\Delta_l(\omega) = 0$ . Для удобства обозначим  $x_0 = \omega R_0/c$  и  $\xi = (R_1 - R_0)/R_0$ ; в этих обозначениях

$$\Delta_l(\omega) = \frac{dS_l}{dx}(x_0) \frac{dC_l}{dx}(x_0 + \xi x_0) - \frac{dC_l}{dx}(x_0) \frac{dS_l}{dx}(x_0 + \xi x_0). \quad (74)$$

Нас будут интересовать решения уравнения  $\Delta_l(\omega) = 0$  при малом  $\xi$  ( $\xi \ll 1$ ) и не слишком большом  $x_0$  (скажем,  $x_0 \lesssim 10$ ), что соответствует шумановскому диапазону частот ( $\omega \sim \sim c/R_0$ ).

В силу того, что  $S_l(x)$  является решением уравнения (66), вторая производная этой функций выражается по формуле

$$\frac{d^2 S_l}{dx^2}(x) = \left( \frac{l(l+1)}{x^2} - 1 \right) S_l(x);$$

дифференцированием мы получаем отсюда и выражение для третьей производной через  $S_l$  и  $dS_l/dx$ :

$$\frac{d^3 S_l}{dx^3}(x) = \left( \frac{l(l+1)}{x^2} - 1 \right) \frac{dS_l}{dx}(x) - \frac{2l(l+1)}{x^3} S_l(x).$$

Принимая это во внимание, мы можем записать разложение в ряд Тейлора относительно точки  $x_0$ :

$$\begin{aligned} \frac{dS_l}{dx}(x_0 + \xi x_0) &= \frac{dS_l}{dx}(x_0) + \frac{d^2 S_l}{dx^2}(x_0) \xi x_0 + \frac{d^3 S_l}{dx^3}(x_0) \frac{\xi^2 x_0^2}{2} + O(\xi^3) = \\ &= \left( 1 + \left( \frac{l(l+1)}{x_0^2} - 1 \right) \frac{\xi^2 x_0^2}{2} \right) \frac{dS_l}{dx}(x_0) + \left( \left( \frac{l(l+1)}{x_0^2} - 1 \right) \xi x_0 - \frac{2l(l+1)}{x_0^3} \frac{\xi^2 x_0^2}{2} \right) S_l(x_0) + O(\xi^3). \end{aligned}$$

Совершенно аналогично мы получаем идентичное соотношение для  $C_l$ :

$$\begin{aligned} \frac{dC_l}{dx}(x_0 + \xi x_0) &= \\ &= \left( 1 + \left( \frac{l(l+1)}{x_0^2} - 1 \right) \frac{\xi^2 x_0^2}{2} \right) \frac{dC_l}{dx}(x_0) + \left( \left( \frac{l(l+1)}{x_0^2} - 1 \right) \xi x_0 - \frac{2l(l+1)}{x_0^3} \frac{\xi^2 x_0^2}{2} \right) C_l(x_0) + O(\xi^3); \end{aligned}$$

подставляя эти выражения в (74), после приведения подобных членов мы получим

$$\Delta_l(\omega) = \left( C_l(x_0) \frac{dS_l}{dx}(x_0) - S_l(x_0) \frac{dC_l}{dx}(x_0) \right) \left( \left( \frac{l(l+1)}{x_0^2} - 1 \right) \xi x_0 - \frac{2l(l+1)}{x_0^3} \frac{\xi^2 x_0^2}{2} \right) + O(\xi^3).$$

Для стоящего в скобках вронскиана функций  $C_l(x)$  и  $S_l(x)$  справедлива формула

$$S_l(x) \frac{dC_l}{dx}(x) - C_l(x) \frac{dS_l}{dx}(x) = -1,$$

вытекающая из известной формулы для вронскиана обычных функций Бесселя [см., например, [Bateman Manuscript Project, 1953](#), разд. 7.2.8 и формула (28) в разд. 7.11] и выражений (67). С учётом этого мы приходим к равенству

$$\Delta_l(\omega) = \frac{\xi}{x_0} \left( l(l+1) - x_0^2 - l(l+1) \xi \right) + O(\xi^3).$$

Ограничиваясь в последней формуле членами порядка не выше  $\xi^2$ , мы можем переформулировать условие  $\Delta_l(\omega) = 0$  в виде

$$x_0^2 \approx l(l+1)(1 - \xi);$$

это даёт нам формулу для частот резонансов

$$\omega_l \approx \frac{c\sqrt{l(l+1)}}{R_0} \sqrt{1 - \frac{R_1 - R_0}{R_0}} \quad (75)$$

с  $l = 1, 2, \dots$  (при  $l = 0$  уравнение  $\Delta_l(\omega) = 0$  не имеет отличных от нуля корней в области не слишком больших  $x_0$ ). В пределе  $R_0 \ll R_1$  отсюда получается классическая формула Шумана (34).

Итак, мы выяснили, что в отсутствие проводимости в задаче существует набор резонансных частот  $\omega_1, \omega_2, \dots$ , определяемых формулой (75). При этом  $l$ -ой частоте  $\omega_l$  соответствует  $2l + 1$  независимая собственная мода с потенциальными функциями  $R_l(r, \omega_l) Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ .

## § 10. Решение задачи в общем случае

Перейдём к решению задачи (62), (63) в общем случае (когда среда, вообще говоря, является проводящей). В соответствии с общей теорией, общее решение однородного линейного обыкновенного дифференциального уравнения (62) имеет вид

$$R_{lm}(r, \omega) = x_{lm}(\omega)T_l(r, \omega) + \tilde{x}_{lm}(\omega)\tilde{T}_l(r, \omega), \quad (76)$$

где  $T_l(r, \omega)$  и  $\tilde{T}_l(r, \omega)$  образуют фундаментальную систему решений, а  $x_{lm}(\omega)$  и  $\tilde{x}_{lm}(\omega)$  — некоторые коэффициенты [см., например, Степанов, 1959, гл. 5, § 2]; второй нижний индекс у  $T_l$  и  $\tilde{T}_l$  мы не пишем, поскольку в однородном уравнении (62) ничего не зависит от  $m$ . В отличие от случая нулевой проводимости, в общем случае у уравнения (62) нет какой-то хорошо известной фундаментальной системы решений; мы конкретизируем  $T_l(r, \omega)$  и  $\tilde{T}_l(r, \omega)$  с помощью условий

$$\begin{aligned} T_l|_{r=R_1} &= 1, & \frac{dT_l}{dr}\Big|_{r=R_1} &= 0, \\ \tilde{T}_l|_{r=R_1} &= 0, & \frac{d\tilde{T}_l}{dr}\Big|_{r=R_1} &= 1 \end{aligned} \quad (77)$$

(для дальнейшего нам удобнее задавать условия именно при  $r = R_1$ ). Как известно из общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений, задача Коши для линейного уравнения (62) (когда значения  $R_{lm}$  и  $dR_{lm}/dr$  задаются в некоторой точке интервала  $(R_0, R_1)$ ) всегда однозначно разрешима не только локально, но и на всём отрезке  $[R_0, R_1]$  [см., например, Степанов, 1959, гл. 7, § 2]. Это означает, в частности, что решения  $T_l(r, \omega)$  и  $\tilde{T}_l(r, \omega)$  определены на всём отрезке  $[R_0, R_1]$  (в случае  $T_l$  и  $\tilde{T}_l$  значения функции и её производной задаются в граничной точке  $r = R_1$ , однако мы всегда можем чуть расширить рассматриваемый отрезок, экстраполировав проводимость).

Подставляя общее решение (76) в (63), из второго граничного условия мы немедленно устанавливаем, что  $\tilde{x}_{lm}(\omega) = 0$ , а тогда первое условие даёт нам равенство для определения  $x_{lm}(\omega)$ :

$$x_{lm} \frac{dT_l}{dr}\Big|_{r=R_0} = -\frac{4\pi L}{i\omega R_0^2} \sum_j I_j^\omega(\omega) \overline{Y_l^m}(\vartheta_j, \varphi_j). \quad (78)$$

Если  $dT_l/dr(R_0, \omega) \neq 0$ , то мы легко выражаем отсюда  $x_{lm}$  и получаем для решения задачи (62), (63) выражение

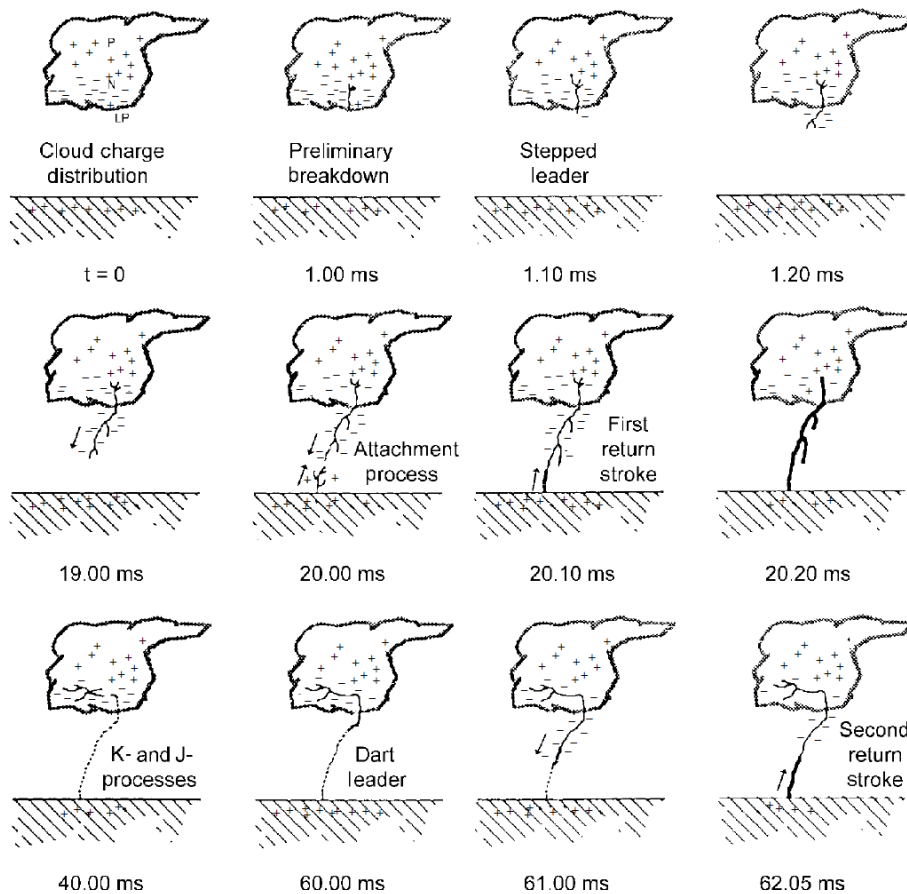
$$R_{lm}(r, \omega) = -\frac{4\pi L}{i\omega R_0^2 dT_l/dr(R_0, \omega)} T_l(r, \omega) \sum_j I_j^\omega(\omega) \overline{Y_l^m}(\vartheta_j, \varphi_j). \quad (79)$$

Если же  $dT_l/dr(R_0, \omega) = 0$ , то  $T_l(r, \omega)$  является решением задачи

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{\varepsilon(r, \omega)} \frac{dT_l}{dr} \right) + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{l(l+1)}{\varepsilon(r, \omega)r^2} \right) T_l = 0, \quad (80)$$

$$\frac{dT_l}{dr}\Big|_{r=R_0} = 0, \quad \frac{dT_l}{dr}\Big|_{r=R_1} = 0. \quad (81)$$

Это уравнение описывает радиальную функцию собственной моды резонатора. Если  $\sigma(r)$  не обращается в нуль, то в силу показанной нами ранее единственности решения задачи собственных мод существовать не может (любое решение задачи без источников обязательно совпадать с тривиальным нулевым решением). В этом случае из (80), (81) немедленно



**Рис. 15.** Схематическое изображение типичных стадий в нисходящем отрицательном молниевом разряде облако — земля. Указаны характерные времена в миллисекундах. Рисунок из книги [Rakov and Uman \[2003, гл. 4\]](#) на основе рисунка в книге [Uman \[1987, гл. 1\]](#).

вытекает, что  $T_l \equiv 0$ , что противоречит условию  $T_l|_{r=R_0} = 1$ . Таким образом, в случае проводящей среды обязательно  $dT_l/dr(R_0, \omega) \neq 0$ , мы всегда сможем однозначно определить коэффициент  $x_{lm}(\omega)$  и выразить  $R_{lm}(r, \omega)$  по формуле (79).

Если же мы считаем среду непроводящей ( $\sigma \equiv 0$ ,  $\varepsilon \equiv 1$ ), то задача (80), (81) совпадает с задачей (70), (71) и действительно определяет собственные моды резонатора и соответствующую им резонансную частоту. На нерезонансных частотах (для которых  $dR_l/dr|_{r=R_1} \neq 0$ ) по-прежнему можно будет однозначно найти коэффициент  $x_{lm}(\omega)$  и вычислить  $R_{lm}(r, \omega)$ ; на резонансных же частотах задача (62), (63) формально будет разрешимой лишь в случае равенства нулю правой части в уравнении (78) и в первом из условий (65), а решение (в случае разрешимости) будет собственным колебанием.

## § 11. Спектр тока молниевых разрядов

Конкретизируем теперь наши предположения об источниках. Мы уже говорили, что колебания в резонаторе Земля — ионосфера возбуждаются и поддерживаются молниевыми разрядами. Считается, что основной вклад в поддержание шумановских резонансов вносят разряды облако — земля, сопровождаемые вертикальным переносом заряда на большие расстояния (помимо них, ещё существуют внутриоблачные разряды, разряды облако — облако и разряды облако — воздух). Молнии облако — земля, в свою очередь, подразделяются на положительные и отрицательные, восходящие и нисходящие; подавляющее большинство таких молний в атмосфере попадает в категорию нисходящих отрицательных разрядов, и мы вполне можем в первом приближении ограни-

читаться ими.

Отрицательный нисходящий разряд облако — земля обычно устроен достаточно сложно; различные его стадии показаны схематично на [рис. 15](#). Не вдаваясь подробно во все нюансы и особенности [см. подробнее [Rakov and Uman, 2003](#), гл. 4], отметим лишь две основные стадии каждого разряда: сначала с облака вниз спускается ступенчатый лидер, создающий проводящий канал и размещающий вдоль него отрицательный заряд, а затем (когда этот лидер почти достигает земной поверхности и соединяется с идущим с неё встречным лидером) за ним следует возвратный удар, в ходе которого размещённый вдоль канала заряд стекает на землю. Через какое-то время по прежнему каналу может пойти новый (так называемый стреловидный) лидер, за которым последует новый возвратный удар; таких компонент у вспышки может быть несколько, однако токи в них будут меньшими по сравнению с первым импульсом.

При моделировании шумановских резонансов принято считать, что основной вклад в их возбуждение даёт именно ток возвратного удара. На [рис. 16](#) показана типичная осциллограмма этого тока в нисходящем отрицательном разряде облако — земля (если вспышка состоит из нескольких компонент, то подобные импульсы повторяются несколько раз с уменьшением амплитуды). В осциллограмме можно выделить быструю стадию нарастания тока и затем медленное экспоненциальное спадание. В дальнейшем мы для простоты будем считать все вспышки однокомпонентными и обладающими одинаковой осциллограммой с точностью до различия значений пикового тока.

В соответствии со сказанным выше, осциллограмму тока возвратного удара в  $j$ -ом молниевом разряде облако — земля, стартующем в момент времени  $t = t_j$ , можно упрощённо параметризовать как

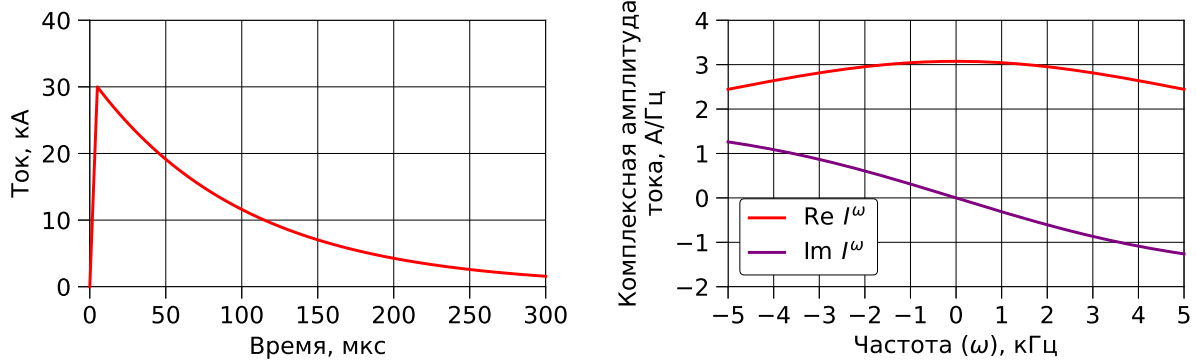
$$I_j(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_j, \\ I_0^{(j)} \frac{t - t_j}{\tau_1}, & t_j < t \leq t_j + \tau_1, \\ I_0^{(j)} \exp\left(-\frac{t - t_j - \tau_1}{\tau_2}\right), & t > t_j + \tau_1, \end{cases} \quad (82)$$

где  $I_0^{(j)}$  — величина пикового тока, а  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — характерные времена. Взяв для оценок характерные значения  $I_0^{(j)} = 30$  кА,  $\tau_1 = 5$  мкс и  $\tau_2 = 100$  мкс [[Berger et al., 1975](#)], мы получим осциллограмму тока, представленную на [рис. 17](#) слева.

Чтобы найти спектральную амплитуду тока, входящую в выражение (79), нужно применить преобразование Фурье к функции (82):

$$I_j^\omega(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} I_j(t) e^{-i\omega t} dt;$$





**Рис. 17.** Слева: модельная зависимость (82) тока возвратного удара в молниевом разряде облако — земля от времени  $(t - t_j)$ . Параметры:  $I_0^{(j)} = 30$  кА,  $\tau_1 = 5$  мкс,  $\tau_2 = 100$  мкс. Справа: модельная зависимость (83) комплексной амплитуды тока возвратного удара в молниевом разряде облако — земля от частоты  $\omega$ . Параметры те же, графики построены для  $t_j = 0$ . Отдельно показаны действительная часть (красная кривая) и мнимая часть (фиолетовая кривая).

после вычисления интеграла получаем:

$$I_j^\omega(\omega) = I_0^{(j)} e^{-i\omega t_j} \left( -\frac{1}{\omega^2 \tau_1} + e^{-i\omega \tau_1} \left( \frac{1 + i\omega \tau_1}{\omega^2 \tau_1} + \frac{\tau_2}{1 + i\omega \tau_2} \right) \right). \quad (83)$$

На рис. 17 справа показана зависимость (83) для осциллограммы тока, приведённой на том же рисунке сверху (мы опустили множитель  $\exp(-i\omega t_j)$ , влияющий лишь на фазу). Видно, что характерный масштаб изменения амплитуды тока молнии с частотой (тысячи герц) существенно превышает значения, характерные для резонансов Шумана (единицы и десятки герц в терминах линейной частоты  $f = \omega/2\pi$ ), поэтому для самых грубых оценок иногда можно использовать даже постоянное значение этой амплитуды.

## § 12. Моделирование шумановских резонансов

Задав проводимость и источники, мы можем для разных  $l$  и  $\omega$  численно найти решение уравнения (62) с граничным условием (77), то есть численно решить задачу Коши

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{\varepsilon(r, \omega)} \frac{dT_l}{dr} \right) + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{l(l+1)}{\varepsilon(r, \omega)r^2} \right) T_l = 0,$$

$$T_l|_{r=R_1} = 1, \quad \left. \frac{dT_l}{dr} \right|_{r=R_1} = 0.$$

Это не представляет особой трудности, поскольку от такой задачи Коши всегда можно перейти к эквивалентной задаче Коши для системы двух уравнений первого порядка

$$\frac{dT_l}{dr} = \varepsilon(r, \omega) \hat{T}_l, \quad \frac{d\hat{T}_l}{dr} = \left( \frac{l(l+1)}{\varepsilon(r, \omega)r^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) T_l,$$

$$T_l|_{r=R_1} = 1, \quad \hat{T}_l|_{r=R_1} = 0,$$

которую уже нетрудно проинтегрировать с помощью обычных численных методов. Затем можно найти радиальную функцию  $R_{lm}(r, \omega)$  по формуле (79) и потенциальную функцию  $U(\mathbf{r}, \omega)$  по формуле (51). Комплексные спектральные амплитуды компонент электрического и магнитного поля можно отыскать по формулам (42)–(44). В теоретических

расчётах нам будет достаточно рассмотреть радиальную компоненту электрического поля, для которой в данном случае (44) принимает вид

$$E_r^\omega = -\frac{1}{\varepsilon(r, \omega)r^2} \Delta_{\vartheta, \varphi} U$$

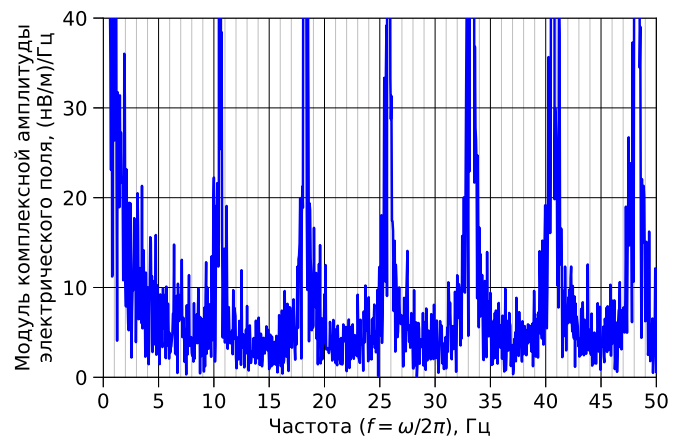
(напомним, что мы перенесли источники в граничные условия, поэтому член со сторонним током теперь у нас отсутствует). Подстановка в эту формулу разложения (51) с учётом (49) приводит нас к выражению

$$E_r^\omega(r, \vartheta, \varphi, \omega) = \frac{1}{\varepsilon(r, \omega)r^2} \sum_{l,m} l(l+1) R_{lm}(r, \omega) Y_l^m(\vartheta, \varphi). \quad (84)$$

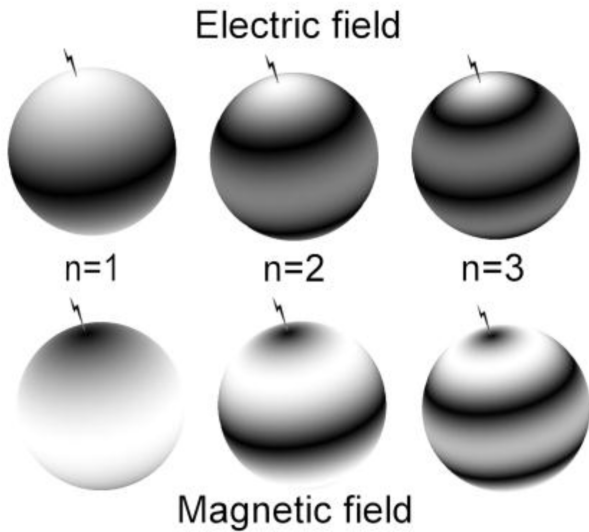
Приведём несколько примеров результатов численных расчётов на основе описанного выше подхода. Во всех расчётах в формуле (84) мы будем сохранять члены с  $l \leq 15$ .

Сначала мы рассмотрим задачу в отсутствие проводимости и со случайным распределением разрядов-источников по земной поверхности. Мы, однако, всё-таки учтём тот факт, что в реальности подавляющее большинство гроз, молнии в которых поддерживают колебания в резонаторе Земля — ионосфера, случается в экваториальных и тропических широтах. Поэтому мы будем рассматривать случайные источники, равномерно распределённые в полосе, лежащей между параллелями  $30^\circ$  ю. ш. и  $30^\circ$  с. ш. Считая, что осциллограмма тока возвратного удара в каждом разряде описывается формулой (82), мы задаём равномерное распределение величины пикового тока  $I_0^{(j)}$  на отрезке  $[0, 60 \text{ кА}]$  (так, чтобы среднее значение составило  $30 \text{ кА}$ ), а также случайным образом выбираем моменты времени  $t_j$ , соответствующие началу протекания тока возвратного удара.

На рис. 18 показан результат вычисления модуля комплексной спектральной амплитуды радиальной компоненты электрического поля на различных частотах на поверхности Земли в точке  $45^\circ$  с. ш.,  $180^\circ$  в. д. с помощью описанного выше подхода для 10000 источников и интервала времени в 30 мин. При построении спектров вместо частоты  $\omega$  мы используем линейную частоту  $f = \omega/2\pi$ , как это принято в экспериментальных исследованиях шумановских резонансов; мы также ограничиваемся лишь областью  $\omega > 0$ , поскольку отрицательная часть спектра при действительном поле  $E_r(\mathbf{r}, t)$  будет отличаться от положительной лишь комплексным сопряжением (в силу вида формулы преобразования Фурье). Мы видим резонансы на частотах  $f_1 = 10.5 \text{ Гц}$ ,  $f_2 = 18.2 \text{ Гц}$ ,  $f_3 = 25.8 \text{ Гц}$  и так далее. Как и следовало ожидать, эти частоты совпадают с получаемыми из формулы (75). В окрестности каждой из этих частот амплитуда электрического поля существенно возрастает (что неудивительно, ибо это в точности те частоты, на которых детерминант  $\Delta_l(\omega)$  системы (68), (69), стоящий в знаменателе выражений для  $u_1(\omega)$  и  $u_2(\omega)$  по правилу Крамера, обращается в нуль.



**Рис. 18.** Результаты расчёта модуля комплексной амплитуды радиальной компоненты электрического поля на поверхности Земли в отсутствие проводимости при равномерном распределении источников в полосе от  $30^\circ$  ю. ш. до  $30^\circ$  с. ш. Расчёт проводился для точки наблюдения  $45^\circ$  с. ш.,  $180^\circ$  в. д. и 10000 источников с пиковыми токами в интервале от 0 до 60 кА в течение 30 мин.



**Рис. 19.** Схематическое изображение нескольких собственных мод резонатора Земля — ионосфера. Сверху показано электрическое поле, снизу — магнитное. Светлые области соответствуют максимумам, тёмные — минимумам. Рисунок из работы Price [2016].

основе реальных данных о распределении молниевых разрядов по земной поверхности. С этой целью мы используем данные глобальной гронопеленгационной сети WWLLN (World Wide Lightning Location Network), которая детектирует значительную часть грозных разрядов на Земле (включая все наиболее интенсивные) и оценивает для каждого из них координаты (широту и долготу), время и энергию. Это позволяет нам реалистично задать входящие в формулы (82) и (83) параметры  $\vartheta_j$ ,  $\varphi_j$ ,  $t_j$  и  $I_0^{(j)}$ ; последний параметр можно оценить по некоторой полуэмпирической формуле, зная энергию [Hutchins et al., 2012].

На рис. 20 слева показана зависимость модуля спектральной амплитуды радиальной компоненты электрического поля от частоты в точке  $45^\circ$  с. ш.,  $180^\circ$  в. д. в задаче с проводимостью (4) и источниками, параметризованными на основе данных гронопеленгационной сети WWLLN за 18:00–18:30 UTC 1 июля 2020 года. Мы видим достаточно зашумлённый спектр, в котором можно заметить некоторый тренд. Простейший способ выделить этот тренд — взять скользящее среднее от графика. Справа на рис. 20 красной линией показано скользящее среднее от этого спектра с симметричным окном усреднения шириной в 4 Гц по линейной частоте (при шаге расчёта спектра в 0.1 Гц). В скользящем среднем резонансы видны более чётко — с первыми тремя максимумами в районе частот 8–9 Гц, 14–16 Гц и 20–21 Гц (некоторые максимумы не очень чёткие, к тому же следует помнить, что при использовании скользящего среднего их точное положение зависит от размера окна усреднения).

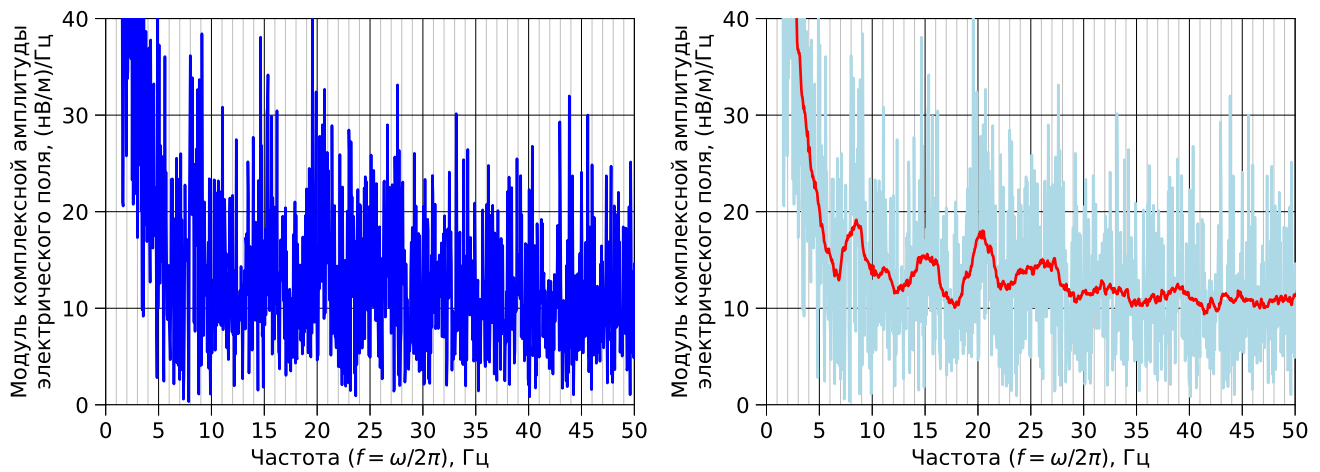
На рис. 21 слева показана средняя картина по всем расчётам за последовательные 30-минутные интервалы в течение суток 1 июля 2020 года (0:00–0:30 UTC, 0:30–1:00 UTC и так далее вплоть до 23:30–0:00 UTC) для той же точки наблюдения ( $45^\circ$  с. ш.,  $180^\circ$  в. д.). Усреднение по множеству расчётов с распределениями источников, соответствующими 48 различным 30-минутным интервалам в течение суток, сильно уменьшает зашумлённость спектра, и мы очень чётко видим последовательные шумановские резонансы. Для более точного анализа этих резонансов справа на рис. 21 красной линией показано скользящее среднее от спектра с окном усреднения в 2 Гц по линейной частоте (по-прежнему

Нетрудно вычислить электрические и магнитные поля, соответствующие собственным модам такого резонатора. Например, аналогично формуле (84) мы можем показать, что собственной моде с номером  $(l, m)$  будет соответствовать радиальное электрическое поле

$$E_r^\omega(r, \vartheta, \varphi, \omega_l) = \frac{l(l+1)}{\varepsilon(r, \omega)r^2} R_l(r, \omega_l) Y_l^m(\vartheta, \varphi).$$

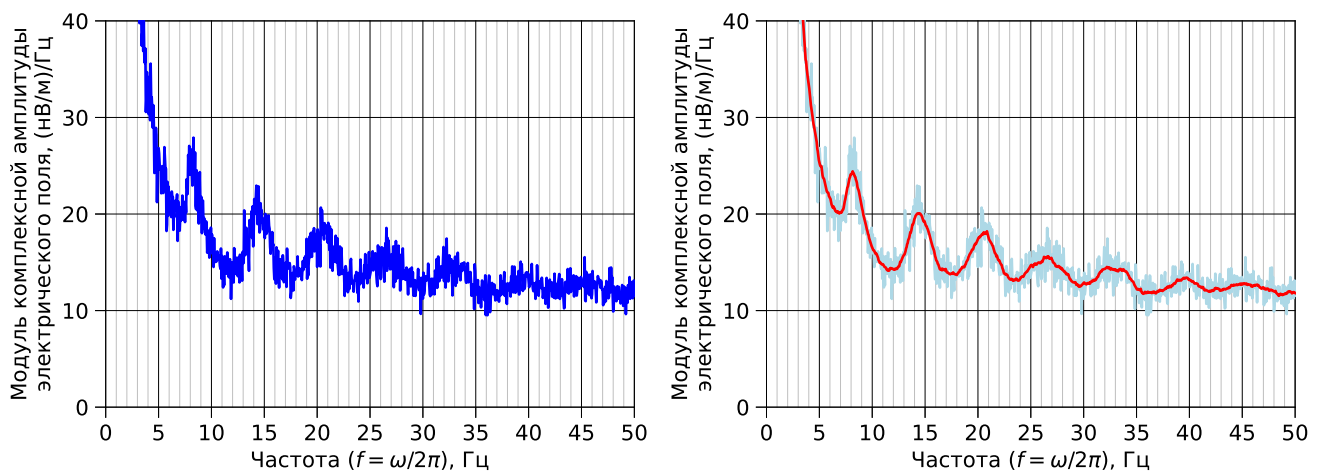
Легко видеть, что радиальная и угловая структуры поля в данном случае разделяются, причём угловая структура описывается обычными сферическими гармониками. Мы не будем здесь выписывать явные выражения для компонент магнитного поля; приведём лишь в качестве иллюстрации на рис. 19 схематическое изображение структуры полей в некоторых азимутально симметричных (когда  $m = 0$ ) модах такого резонатора.

Более интересная задача получится, если учесть проводимость атмосферы, задав её простейшей формулой (4), а источники задать на

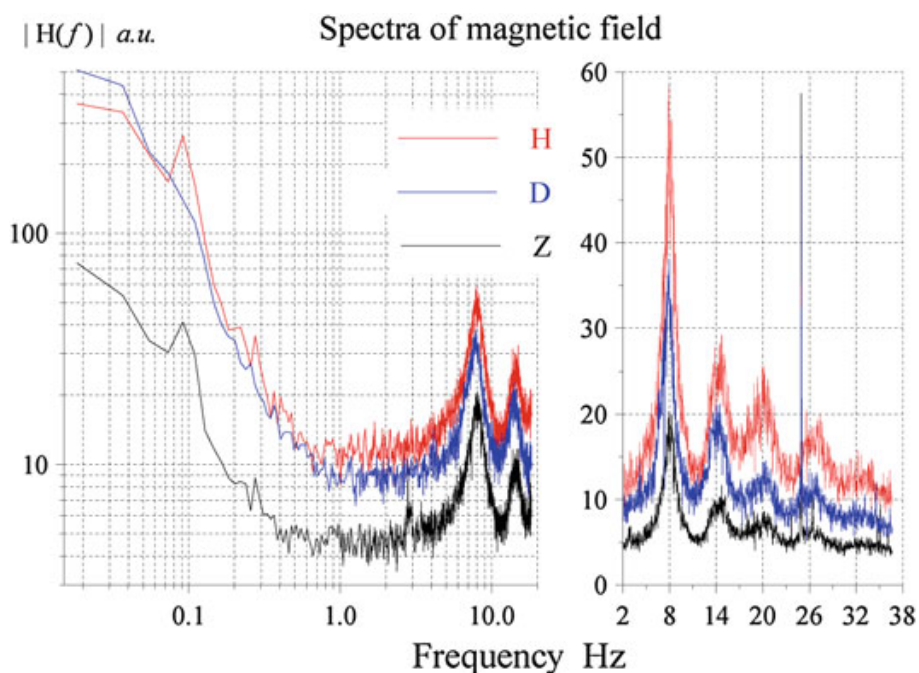


**Рис. 20.** Результаты расчёта модуля комплексной амплитуды радиальной компоненты электрического поля на поверхности Земли в случае профиля проводимости (4) при распределении источников по данным грозопеленгационной сети WWLLN за 18:00–18:30 UTC 1 июля 2020 года. Расчёт проводился для точки наблюдения  $45^\circ$  с. ш.,  $180^\circ$  в. д. Справа дополнительно показано скользящее среднее с симметричным окном усреднения шириной в 4 Гц.

при шаге расчёта в 0.1 Гц). Применявшееся нами ранее для сглаживания окно усреднения в 4 Гц теперь является избыточным (и вносит некоторые искажения в частоты резонансов — однако раньше нам просто не хватило бы окна меньшего размера при таком способе избавления от зашумлённости). Частоты первых трёх резонансов, согласно рис. 21, составляют 8.1 Гц, 14.4 Гц и 20.8 Гц.



**Рис. 21.** Усреднённые результаты расчёта модуля комплексной амплитуды радиальной компоненты электрического поля на поверхности Земли в случае профиля проводимости (4) при распределении источников по данным грозопеленгационной сети WWLLN за 1 июля 2020 года. Расчёты проводились для 48 различных 30-минутных интервалов (0:00–0:30 UTC, 0:30–1:00 UTC и так далее вплоть до 23:30–0:00 UTC) для точки наблюдения  $45^\circ$  с. ш.,  $180^\circ$  в. д., после чего было произведено усреднение по всем расчётам. Справа дополнительно показано скользящее среднее с симметричным окном усреднения шириной в 2 Гц.



**Рис. 22.** Экспериментально полученные спектры компонент магнитного поля на поверхности Земли (в условных единицах) в диапазоне линейных частот от сотых долей Гц до десятков Гц. Рисунок из книги [Nickolaenko and Hayakawa \[2014\]](#) на основе данных из обсерватории в посёлке Каримшино, Камчатка.

### § 13. Наблюдения шумановских резонансов

В заключение скажем буквально несколько слов о наблюдениях шумановских резонансах. При теоретическом моделировании мы вполне могли ограничиться только радиальной компонентой электрического поля на поверхности Земли, которую можно вычислить по формуле (84). Однако в экспериментальных исследованиях шумановских резонансов чаще всего измеряют и анализируют поперечные компоненты магнитного поля, в то время как на реальное электрическое поле существенное влияние оказывают локальные возмущения проводимости вблизи поверхности Земли.

На [рис. 22](#) показаны спектры трёх компонент магнитного поля на поверхности Земли по данным измерений на Камчатке. Видно, что в шумановском диапазоне первым трём резонансам соответствуют частоты около 8 Гц, 14 Гц и 20 Гц, что в целом согласуется с приведёнными выше результатами моделирования (важно помнить, что точные значения частот варьируются в зависимости от времени и точки наблюдения). Обращает на себя внимание наличие резонансных пиков в спектрах всех трёх компонент магнитного поля (с точки зрения теории вертикальная компонента магнитного поля не должна быть задействована в колебаниях резонатора в шумановском диапазоне; вероятно, причина появления резонансной структуры в её спектре связана с неточным выбором вертикального направления из-за местных аномалий магнитного поля). Отметим также, что в области более низких частот в спектрах возможны пики, связанные с геомагнитными пульсациями и ионосферным альфвеновским резонатором, однако мы не будем здесь останавливаться на этом подробнее.



## Литература

- Ault J. P., Mauchly S. J. Atmospheric Electric Results Obtained aboard the Carnegie, 1915–1921. Washington, D.C.: Carnegie Institution of Washington, 1926. URL: <https://archive.org/details/oceanmagneticcele00carn>. Carnegie Institution of Washington Publication 175.
- Balsler M., Wagner C. Observations of Earth–ionosphere cavity resonances // *Nature*. V. 188, no. 4751. P. 638–641. 1960. DOI: [10.1038/188638a0](https://doi.org/10.1038/188638a0).
- Bateman Manuscript Project. Higher Transcendental Functions, V. 2. New York: McGraw-Hill, 1953.
- Baumgaertner A. J. G., Thayer J. P., Neely III R. R., Lucas G. Toward a comprehensive global electric circuit model: Atmospheric conductivity and its variability in CESM1(WACCM) model simulations // *J. Geophys. Res. Atmos.* V. 118, no. 16. P. 9221–9232. 2013. DOI: [10.1002/jgrd.50725](https://doi.org/10.1002/jgrd.50725).
- Bazilevskaya G. A., Usoskin I. G., Flückiger E. O., Harrison R. G., Desorgher L., Bütikofer R., Krainev M. B., Makhmutov V. S., Stozhkov Y. I., Svirzhevskaya A. K., Svirzhevsky N. S., Kovaltsov G. A. Cosmic ray induced ion production in the atmosphere // *Space Sci. Rev.* V. 137, no. 1–4. P. 149–173. 2008. DOI: [10.1007/s11214-008-9339-y](https://doi.org/10.1007/s11214-008-9339-y).
- Berger K., Anderson R. B., Kröniger H. Parameters of lightning flashes // *Electra*. V. 80, no. 41. P. 23–37. 1975.
- Gringel W., Rosen J. M., Hofmann D. J. Electrical structure from 0 to 30 kilometers. In: *The Earth's Electrical Environment*, ed. by Krider E. P., Roble R. G., P. 166–182. Washington, D.C.: National Acad. Press, 1986.
- Harrison R. G. The Carnegie curve // *Surv. Geophys.* V. 34, no. 2. P. 209–232. 2013. DOI: [10.1007/s10712-012-9210-2](https://doi.org/10.1007/s10712-012-9210-2).
- Hutchins M. L., Holzworth R. H., Rodger C. J., Brundell J. B. Far-field power of lightning strokes as measured by the World Wide Lightning Location Network // *J. Atmos. Ocean. Technol.* V. 29, no. 8. P. 1102–1110. 2012. DOI: [10.1175/JTECH-D-11-00174.1](https://doi.org/10.1175/JTECH-D-11-00174.1).
- Krehbiel P. R. The electrical structure of thunderstorms. In: *The Earth's Electrical Environment*, ed. by Krider E. P., Roble R. G., P. 90–113. Washington, D.C.: National Acad. Press, 1986.
- Mareev E. A., Volodin E. M. Variation of the global electric circuit and ionospheric potential in a general circulation model // *Geophys. Res. Lett.* V. 41, no. 24. P. 9009–9016. 2014. DOI: [10.1002/2014GL062352](https://doi.org/10.1002/2014GL062352).
- Markson R. The global circuit intensity: Its measurement and variation over the last 50 years // *Bull. Amer. Meteor. Soc.* V. 88, no. 2. P. 223–241. 2007. DOI: [10.1175/BAMS-88-2-223](https://doi.org/10.1175/BAMS-88-2-223).
- Markson R., Ruhnke L. H., Williams E. R. Global scale comparison of simultaneous ionospheric potential measurements // *Atmos. Res.* V. 51, no. 3–4. P. 315–321. 1999. DOI: [10.1016/S0169-8095\(99\)00016-2](https://doi.org/10.1016/S0169-8095(99)00016-2).
- Mauchly S. J. On the diurnal variation of the potential gradient of atmospheric electricity // *Terr. Magn. Atmos. Electr.* V. 28, no. 3. P. 61–81. 1923. DOI: [10.1029/TE028i003p00061](https://doi.org/10.1029/TE028i003p00061).
- Neher H. V. Cosmic-ray knee in 1958 // *J. Geophys. Res.* V. 66, no. 12. P. 4007–4012. 1961. DOI: [10.1029/JZ066i012p04007](https://doi.org/10.1029/JZ066i012p04007).

- Neher H. V. Cosmic-ray particles that changed from 1954 to 1958 to 1965 // *J. Geophys. Res.* V. 72, no. 5. P. 1527–1539. 1967. DOI: [10.1029/JZ072i005p01527](https://doi.org/10.1029/JZ072i005p01527).
- Nickolaenko A., Hayakawa M. *Schumann Resonance for Tyros*. Springer Geophysics. Tokyo: Springer, 2014. DOI: [10.1007/978-4-431-54358-9](https://doi.org/10.1007/978-4-431-54358-9).
- Price C. ELF electromagnetic waves from lightning: The Schumann resonances // *Atmosphere*. V. 7, no. 9. 116. 2016. DOI: [10.3390/atmos7090116](https://doi.org/10.3390/atmos7090116).
- Rakov V. A., Uman M. A. *Lightning: Physics and Effects*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003.
- Rycroft M. J., Harrison R. G., Nicoll K. A., Mareev E. A. An overview of Earth's global electric circuit and atmospheric conductivity // *Space Sci. Rev.* V. 137, no. 1–4. P. 83–105. 2008. DOI: [10.1007/s11214-008-9368-6](https://doi.org/10.1007/s11214-008-9368-6).
- Schumann W. O. Über die strahlungslosen Eigenschwingungen einer leitenden Kugel, die von einer Luftschicht und einer Ionosphärenhülle umgeben ist // *Z. Naturforschung A*. Bd. 7, H. 2. S. 149–154. 1952. DOI: [10.1515/zna-1952-0202](https://doi.org/10.1515/zna-1952-0202).
- Sentman D. D. Schumann resonances. In: *Handbook of Atmospheric Electrodynamics*. V. 1, ed. by Volland H. Boca Raton: CRC Press, 1995. DOI: [10.1201/9780203719503](https://doi.org/10.1201/9780203719503).
- Slyunyaev N. N., Frank-Kamenetsky A. V., Ilin N. V., Sarafanov F. G., Shatalina M. V., Mareev E. A., Price C. G. Electric field measurements in the Antarctic reveal patterns related to the El Niño—Southern Oscillation // *Geophys. Res. Lett.* V. 48, no. 21. e2021GL095389. 2021. DOI: [10.1029/2021GL095389](https://doi.org/10.1029/2021GL095389).
- Surkov V., Hayakawa M. *Ultra and Extremely Low Frequency Electromagnetic Fields*. Springer Geophysics. Tokyo: Springer, 2014. DOI: [10.1007/978-4-431-54367-1](https://doi.org/10.1007/978-4-431-54367-1).
- Sverdrup H. U. Scientific work of the Maud Expedition, 1922–1925 // *The Scientific Monthly*. V. 22, no. 5. P. 400–410. 1926. URL: <https://www.jstor.org/stable/7648>.
- Tinsley B. A., Zhou L. Initial results of a global circuit model with variable stratospheric and tropospheric aerosols // *J. Geophys. Res.* V. 111, no. D16. D16205. 2006. DOI: [10.1029/2005JD006988](https://doi.org/10.1029/2005JD006988).
- Torreson O. W., Parkinson W. C., Gish O. H., Wait G. R. *Ocean Atmospheric-Electric Results (Scientific Results of Cruise VII of the Carnegie during 1928–1929 under Command of Captain J. P. Ault, Oceanography—III)*. Washington, D.C.: Carnegie Institution of Washington, 1946. URL: <https://archive.org/details/oceanatmospheric00carn>. Carnegie Institution of Washington Publication 568.
- Uman M. A. *The Lightning Discharge*. Orlando: Acad. Press, 1987.
- Whipple F. J. W., Scrase F. J. Point discharge in the electric field of the Earth: An analysis of continuous records obtained at Kew Observatory. London, 1936. URL: [https://digital.nmla.metoffice.gov.uk/IO\\_efb7fd62-a542-4266-aac6-cbdeae3311b6](https://digital.nmla.metoffice.gov.uk/IO_efb7fd62-a542-4266-aac6-cbdeae3311b6). *Geophys. Mem.* No. 68.
- Williams E., Mareev E. Recent progress on the global electrical circuit // *Atmos. Res.* V. 135–136. P. 208–227. 2014. DOI: [10.1016/j.atmosres.2013.05.015](https://doi.org/10.1016/j.atmosres.2013.05.015).
- Williams E. R. The global electrical circuit: A review // *Atmos. Res.* V. 91, no. 2–4. P. 140–152. 2009. DOI: [10.1016/j.atmosres.2008.05.018](https://doi.org/10.1016/j.atmosres.2008.05.018).

- Williams E. R. Electricity in the atmosphere | Global electrical circuit. In: Encyclopedia of Atmospheric Sciences, ed. by North G. R., Pyle J., Zhang F., P. 1–8. Oxford: Academic Press, 2 ed., 2015. DOI: [10.1016/B978-0-12-382225-3.00144-4](https://doi.org/10.1016/B978-0-12-382225-3.00144-4).
- Wilson C. T. R. Investigations on lightning discharges and on the electric field of thunderstorms // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A. V. 221. P. 73–115. 1921. DOI: [10.1098/rsta.1921.0003](https://doi.org/10.1098/rsta.1921.0003).
- Zhou L., Tinsley B. A. Global circuit model with clouds // J. Atmos. Sci. V. 67, no. 4. P. 1143–1156. 2010. DOI: [10.1175/2009JAS3208.1](https://doi.org/10.1175/2009JAS3208.1).
- Анисимов С. В., Мареев Е. А. Геофизические исследования глобальной электрической цепи // Физика Земли. № 10. С. 8–18. 2008.
- Блиох П. В., Николаенко А. П., Филиппов Ю. Ф. Глобальные электромагнитные резонансы в полости Земля — ионосфера. Киев: Наукова думка, 1977.
- Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. Москва: Радио и связь, 2 изд., 1988.
- Калинин А. В., Слюняев Н. Н., Мареев Е. А., Жидков А. А. Стационарные и нестационарные модели глобальной электрической цепи: корректность, аналитические соотношения, численная реализация // Изв. РАН. ФАО. Т. 50, № 3. С. 355–364. 2014. DOI: [10.7868/S0002351514030079](https://doi.org/10.7868/S0002351514030079).
- Мареев Е. А. Достижения и перспективы исследований глобальной электрической цепи // УФН. Т. 180, № 5. С. 527–534. 2010. DOI: [10.3367/UFNr.0180.201005h.0527](https://doi.org/10.3367/UFNr.0180.201005h.0527).
- Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики. Москва: Наука, 2 изд., 1984.
- Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Москва: Физматгиз, 8 изд., 1959.